

Mathematics

מבינים מתמטיקה

חוברת סיכום קורס

תוכן עניינים

3	מספרים מרוכבים
3	ייצוג אלגברי
13	ייצוג גיאומטרי
19	שדות
21	פולינומים
21	מושגים בסיסיים
28	שורשים
34	מטריצות
34	הגדרות בסיסיות ופעולות חשבון
43	מטריצות מיוחדות והגדרות נוספות
57	מערכת משוואות לינאריות
57	הגדרות בסיסיות
61	פעולות אלמנטריות
63	הדירוג של גאוס
67	חקירת מערכת משוואות לינאריות
72	מרחבים וקטורים
72	הגדרה
74	תת מרחב וקטורי
81	תלות לינארית
83	בסיס ומימד
86	מימד ודרגה של מטריצה
88	דטרמיננטות
88	הגדרות בסיסיות
93	תכונות של דטרמיננטה
97	מטריצות הפיכות
97	הגדרה

99.....	הופכית של מטריצות מגודל 2×2
100.....	תכונות
101.....	משפט השקילות
103.....	העתקות לינאריות
103.....	הגדרות בסיסיות
107.....	גרעין ותמונה
110.....	פעולות חשבון בהעתקות לינאריות
112.....	העתקות חד-חד-ערכיות, על והפיכות
115.....	משפט המימדים להעתקות לינאריות
117.....	מטריצה מייצגת
124.....	דמיון, ערכים עצמיים ולכסון
124.....	ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים
132.....	דמיון מטריצות – הגדרה
133.....	לכסון מטריצות

אלגברה לינארית מ'

מספרים מרוכבים

ייצוג אלגברי

קבוצות המספרים

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\mathbb{R} = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$$

המספר i – הגדרה

i הוא המספר המקיים $i^2 = -1$.

מספרים מרוכבים – הגדרה

קבוצת המספרים מהצורה $z = a + bi$ כאשר $a, b \in \mathbb{R}$ נקראים המספרים המרוכבים. a נקרא החלק הממשי של z ומסומן גם ב- $Re(Z)$ ו- b נקרא החלק המדומה של z ומסומן גם ב- $Im(z)$.
נסמן את קבוצת המספרים המרוכבים ב- $\mathbb{C}$.

הצורה

הצורה של מספר מרוכב $a + bi$ נקראת ייצוג אלגברי. בהמשך נלמד ייצוג נוסף שנקרא ייצוג גיאומטרי.

דוגמאות

- (1) $0, 1, \pi, -2$ הם מספרים מרוכבים.
- (2) המספר $1 - i$ הוא מספר מרוכב.
- (3) i הוא מספר מרוכב.

הגדרה

נחלק את המספרים לשלוש קבוצות.

- (1) כל המספרים המרוכבים z שמקיימים $Im(z) = 0$ נקראים מספרים ממשיים טהורים.
- (2) כל המספרים המרוכבים z שמקיימים $Re(z) = 0$ נקראים מספרים מדומים טהורים.
- (3) כל השאר.

דוגמאות

- (1) המספרים $0, \pi, \sqrt{2}$ הם ממשיים טהורים.
- (2) המספרים $i, \pi i, 30i$ הם מדומים טהורים.
- (3) המספר $1 + i$ הוא לא ממשי טהור ולא מדומה טהור.

הערה

שימו לב שמספרים ממשיים טהורים הם בעצם מספרים ממשיים. כלומר $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

שוויון מספרים מרוכבים – הגדרה

יהיו $z_1 = a + bi$ ו- $z_2 = c + di$ שני מספרים מרוכבים. נאמר ש- $z_1 = z_2$ אם $a = c$ וגם $b = d$.

הערה

במילים אחרות, שני מספרים מרוכבים הם שווים אם החלק הממשי שלהם שווה וגם החלק המדומה שלהם שווה.

דוגמאות

- (1) המספרים $1 - i, 1 - i$ הם שווים.
- (2) המספרים $1 + i, 1 - i$ הם לא שווים.

חיבור מספרים מרוכבים – הגדרה

יהיו $z_1 = a + bi$ ו- $z_2 = c + di$ שני מספרים מרוכבים. נגדיר

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

הערה

חיבור של שני מספרים מרוכבים נותן מספר מרוכב שהחלק הממשי שלו שווה לסכום החלקים הממשיים והחלק המדומה שלו שווה לסכום החלקים המדומים.

דוגמה

נתון

$$z_1 = 3 - 2i$$

$$z_2 = -2 + 5i$$

חשב את $z_1 + z_2$.

הערה

אפשר לחשוב על החיבור גם בכך שמחברים את כל האיברים שיש בהם i ואת כל החלקים שאין בהם i .

כפל מספרים מרוכבים – הגדרה

יהיו $z_1 = a + bi$ ו- $z_2 = c + di$ שני מספרים מרוכבים. נגדיר

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

הערה

לא צריך לזכור את הנוסחה. למעשה הנוסחה מתאימה בדיוק למה שמתקבל כשפותחים סוגריים.

דוגמה

נתון

$$z_1 = 3 - 2i$$

$$z_2 = -2 + 5i$$

חשב את $z_1 \cdot z_2$.

צמוד מרוכב – הגדרה

יהי $z = a + bi$ מספר מרוכב. הצמוד המרוכב של z אשר יסומן ב- $\bar{z}$ מוגדר להיות

$$\bar{z} = a - bi$$

הערה

שימו לב שהחלק הממשי של מספר מרוכב ושל הצמוד שלו הוא שווה והחלק המדומה הוא רק שונה בסימן. כלומר כדי למצוא את הצמוד עלינו פשוט לשנות את הסימן של החלק המדומה.

דוגמאות

מצא את הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים.

$$(1) \quad \overline{1 + i}$$

$$(2) \quad \overline{-3 + 2i}$$

$$(3) \quad 7$$

מודול של מספר מרוכב – הגדרה

יהי $z = a + bi$ מספר מרוכב. המודול של z אשר יסומן ב- $|z|$ מוגדר להיות

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

הערה

- (1) במילים אחרות, המודול של מספר מרוכב הוא שורש של סכום ריבועי החלק הממשי והמדומה.
- (2) המודול של מספר מרוכב נקרא גם הגודל של מספר מרוכב.
- (3) שימו לב שהמודול הוא תמיד מספר ממשי אי שלילי, שכן a^2, b^2 הם מספרים ממשיים אי שליליים.

דוגמה

חשב את $|-2 + 5i|$.

תכונה חשובה

יהי z מספר מרוכב, אז מתקיים

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

הערה

במילים אחרות, מספר מרוכב כפול הצמוד שלו נותן את המודול שלו בריבוע.

דוגמה

הראה שהנוסחה נכונה עבור $-2 + 5i$.

חלוקת מספרים מרוכבים

יהיו $z_1 = a + bi$ ו- $z_2 = c + di \neq 0$ אז

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{|z_2|^2} = \\ &= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \end{aligned}$$

הערה

לא צריך לזכור את הנוסחה הסופית. כדי לחשב חלוקה של מספרים מרוכבים בייצוג אלגברי נכפיל ונחלק בצמוד של המכנה ואז נחשב כל חלק בנפרד.

דוגמה

חשב את $\frac{5-i}{1+i}$.

תכונות

יהיו $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ מספרים מרוכבים.

$$(1) \text{ חוק החילוף: } z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

$$(2) \text{ חוק הקיבוץ: } (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

$$(3) \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$(4) \text{ קומוטטיביות בכפל: } z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

$$(5) \text{ אסוציאטיביות בכפל: } (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$$

$$(6) \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$(7) \overline{z^n} = \overline{z}^n \text{ לכל } n \in \mathbb{N}$$

$$(8) \text{ חוק הפילוג: } (z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$$

$$(9) z \cdot \overline{z} = |z|^2$$

$$(10) z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$$

$$(11) z - \overline{z} = 2\operatorname{Im}(z)i$$

$$(12) |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$(13) |z^n| = |z|^n \text{ לכל } n \in \mathbb{N}$$

$$(14) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ אי שוויון המשולש}$$

ייצוג גיאומטרי

דוגמה

צייר על מערכת צירים את המספר $3 + 2i$.

ייצוג גיאומטרי

בהנתן מספר מרוכב בייצוג אלגברי:

$$z = a + bi$$

הייצוג הגיאומטרי של אותו מספר הוא:

$$z = r \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \triangleq r\text{cis}(\theta)$$

כאשר מתקיים

$$\begin{cases} \text{tg}(\theta) = \frac{b}{a} \\ r = \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$

כאשר $a \neq 0$.

כאשר $a = 0$ אז $\theta = 90$ או $\theta = 270$.

כאשר בחירת θ מתבצעת לפי הרביע שבו נמצא המספר.

הערה

- (1) שימו לב $|z| = r$. אמרנו מקודם שהמודול גם נקרא הגודל של z וזה בעצם אומר שהוא מייצג את המרחק של z מהראשית.
- (2) הזווית θ היא הזווית שהיא בין המספר לכיוון החיובי של ציר ה- x .
- (3) הנוסחה היא ל- $tg(\theta)$ ואז יהיו לנו שתי אפשרויות לבחור מהם עבור θ . אנחנו נבחר את הזווית המתאימה לפי הרביע של המספר.
- (4) הסימון $\arg(z)$ מייצג את הזווית θ . כלומר $\arg(z) = \theta$.

דוגמאות

- (1) מצא את הייצוג הגיאומטרי של 3.
- (2) מצא את הייצוג הגיאומטרי של $-2i$.
- (3) מצא את הייצוג הגיאומטרי של $-1 + \sqrt{3}i$.

הערה

שימו לב שלמעשה מהייצוג הגיאומטרי אפשר לחזור לייצוג אלגברי מאד בקלות. החלק הממשי יהיה שווה ל- $r \cos(\theta)$ והחלק המדומה יהיה שווה ל- $r \sin(\theta)$.

כפל וחילוק בייצוג גיאומטרי

יהיו שני מספרים מרוכבים בייצוג גיאומטרי:

$$z_1 = r_1 \operatorname{cis}(\theta_1), z_2 = r_2 \operatorname{cis}(\theta_2)$$

אז:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) \quad (1)$$

$$r_2 \neq 0 \text{ כאשר } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2) \quad (2)$$

הערה

- (1) הדרישה ב-2 ש- $r_2 \neq 0$ פשוט אומרת ש- $z_2 \neq 0$ ואז אפשר באמת לחלק בו.
- (2) פעולות של כפל וחילוק מתבצעות בקלות רבה בייצוג גיאומטרי.

דוגמה

$$\text{חשב את } -2i \cdot (-1 + \sqrt{3}i) \text{ ואת } \frac{-2i}{-1 + \sqrt{3}i}$$

הערה

שימו לב שיכולנו לחשב את הכפל והחילוק גם בייצוג אלגברי בלי יותר מדי אתגר.

העלאה בחזקה של מספר מרוכב (נוסחת דה – מאובר)

יהי $z = r \operatorname{cis}(\theta)$ מספר מרוכב בייצוג גיאומטרי ויהי $n \in \mathbb{N}$ מספר טבעי, אזי:

$$z^n = r^n \operatorname{cis}(n\theta)$$

הערה

שימו לב שלהעלות מספר בחזקה זה להעלות בחזקת n את הגודל שלו ולהכפיל את הזווית ב- n .

דוגמה

חשב את $(-1 + \sqrt{3}i)^{10}$.

הערה

כאשר אנחנו צריכים לחשב חזקה גבוהה, נעביר לייצוג גיאומטרי ונחשב בעזרת נוסחת דה – מאובר.

שורש מסדר n – הגדרה

יהי $z \in \mathbb{C}$ מספר מרוכב ויהי $n \in \mathbb{N}$.

המספר המרוכב $a \in \mathbb{C}$ נקרא שורש מסדר n של z אם מתקיים:

$$a^n = z$$

דוגמה

המספר $-1 + \sqrt{3}i$ הוא שורש מסדר 10 של המספר $-512 + 512\sqrt{3}i$.

הוצאת שורשים למספר מרוכב

יהי $0 \neq z = r \operatorname{cis}(\theta)$ מספר מרוכב בייצוג גיאומטרי ו- $n \in \mathbb{N}$ מספר טבעי.

אז ל- z יש n שורשים שונים מסדר n :

$$z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$$

הנתונים על ידי הנוסחה הבאה:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{360}{n}k\right)$$

כאשר $k = 0, 1, \dots, n-1$.

הערה

- (1) לכל מספר מרוכב יש בדיוק n שורשים מסדר n .
- (2) כדי למצוא שורשים של מספר מרוכב נעביר אותו לייצוג גיאומטרי ואז נשתמש בנוסחה של הוצאת שורש.
- (3) שימו לב ש- $z \neq 0$ משום שעבור 0 יש רק שורש יחיד מכל סדר והוא 0.

דוגמה

מצא את כל השורשים מסדר 5 של 1.

שדות

שדה – הגדרה

תהי $\mathbb{F}$ קבוצה לא ריקה ויהיו שתי פעולות שמוגדרות עליה שנסמן ב- $\oplus, \odot$.

$\mathbb{F}$ תקרא שדה אם מתקיימות 11 התכונות הבאות לכל $a, b, c \in \mathbb{F}$:

- (1) סגירות לחיבור: $a \oplus b \in \mathbb{F}$.
- (2) קומוטטיביות בחיבור: $a \oplus b = b \oplus a$.
- (3) אסוציאטיביות בחיבור: $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$.
- (4) קיים איש איברי שנסמנו ב- 0 המקיים: $0 \oplus a = a \oplus 0 = a$.
- (5) קיים נגדי שנסמנו ב- $-a$ המקיים: $a \oplus (-a) = (-a) \oplus a = 0$.
- (6) סגירות לכפל: $a \odot b \in \mathbb{F}$.
- (7) קומוטטיביות בכפל: $a \odot b = b \odot a$.
- (8) אסוציאטיביות בכפל: $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$.
- (9) קיים איש כפלי שנסמנו ב- 1 המקיים: $1 \odot a = a \odot 1 = a$.
- (10) לכל $a \neq 0$ קיים הופכי שנסמנו ב- a^{-1} המקיים: $a \odot a^{-1} = a^{-1} \odot a = 1$.
- (11) דיסטריבוטיביות של הכפל מעל החיבור $a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$.

הערה

ניתן לסמן את ההופכי גם בסימון $\frac{1}{a}$.

טענה

המרוכבים והממשיים עם פעולות החיבור והכפל הרגילות הם שדות.

הערות

- (1) לרוב בקורס אנחנו נשתמש בשדה הממשיים או שדה המרוכבים.
- (2) הממשיים הם נותנים אינטואיציה די טובה למה שאפשר לעשות בשדה.
- (3) ניתן לחשוב על שדה כעל קבוצה עם פעולת חיבור וכפל שניתן לעשות בה את כל הפעולות כולל לחלק (להכפיל בהופכי) ולהחסיר (לחבר את הנגדי) בדומה לאיך שאנחנו עובדים בממשיים.

פולינומים

מושגים בסיסיים

פולינום – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

פונקציה $p: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ תקרא פולינום מעל $\mathbb{F}$ אם היא מהצורה

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

כאשר $n \in \mathbb{N}$ ו- $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{F}$.

נסמן את קבוצת כל הפולינומים מעל $\mathbb{F}$ ב- $\mathbb{F}[x]$.

הערות

- (1) $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ נקראים המקדמים של הפולינום.
- (2) כל הפולינומים מעל $\mathbb{R}$ מסומנים ב- $\mathbb{R}[x]$ והם כל הפולינומים עם מקדמים ממשיים.
- (3) כל הפולינומים מעל $\mathbb{C}$ מסומנים ב- $\mathbb{C}[x]$ והם כל הפולינומים עם מקדמים מרוכבים.
- (4) במילים אחרות פולינום זו פונקציה שהיא סכום סופי של מקדם שכולל חזקה טבעית (החזקה היא מספר טבעי) של x .

דוגמאות

- (1) הפונקציה $p(x) = x^2 - 3x + 1$ היא פולינום שהמקדמים שלה הם $1, -3, 1$.
- (2) הפונקציה $p(x) = 3$ היא פולינום שהמקדם שלה הוא 3 .
- (3) הפונקציה $p(x) = (x - 1)^2$ היא פולינום משום שהיא ניתנת לכתיבה על ידי $p(x) = x^2 - 2x + 1$.
- (4) הפונקציה $p(x) = 0$ היא פולינום והיא נקראת פולינום האפס.
- (5) הפונקציה $p(x) = \sqrt{x}$ היא לא פולינום.

מעלת הפולינום – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

יהי $p(x)$ פולינום מעל $\mathbb{F}$.

מעלת הפולינום $p(x)$ היא החזקה הגבוהה ביותר שהמקדם שלה הוא אינו אפס והיא מסומן ב-
 $\deg(p(x))$.

הערות

- (1) המעלה של פולינום היא למעשה החזקה הכי גבוהה שמופיעה בפולינום בכתיבה מפורשת, כלומר
 אם $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ו- $a_n \neq 0$ אז $\deg(p(x)) = n$.
- (2) נהוג להגדיר את מעלת פולינום האפס, כלומר $p(x) = 0$, להיות $-\infty$.

דוגמאות

- (1) המעלה של הפולינום $p(x) = x^2 - 2x + 3$ היא 2.
- (2) המעלה של הפולינום $p(x) = x^5 - x + 3$ היא 5.
- (3) המעלה של הפולינום $p(x) = 1$ היא 0.

הגדרה

יהי $p(x) \neq 0$ פולינום שאינו פולינום האפס.

- (1) המקדם של x^0 נקרא המקדם החופשי של $p(x)$.
- (2) המקדם של $x^{\deg(p(x))}$ נקרא המקדם המוביל.

הערה

(1) המקדם החופשי שווה גם ל- $p(0)$. כלומר אם נציב 0 בפולינום אז זה יהיה שווה למקדם החופשי.

(2) המקדם המוביל תמיד לפי הגדרה שונה מאפס.

דוגמאות

(1) $p(x) = x^2 - 2x + 3$, המקדם המוביל הוא 1 והמקדם החופשי הוא 3.

(2) $p(x) = 1$, המקדם המוביל הוא 1 והמקדם החופשי הוא 1.

(3) $p(x) = 2x^5 - 5x + 7$, המקדם המוביל הוא 2 והמקדם החופשי הוא 7.

חיבור פולינומים – הגדרה

יהיו $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ו- $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$ פולינומים. אז פולינום הסכום מוגדר להיות

$$p(x) + q(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots (a_0 + b_0)$$

הערות

- (1) שימו לב שהנחנו בהגדרה ששני הפולינומים הם סכום עד אותו n . גם אם הפולינומים לא בהכרח מגיעים לאותו n בסכום אפשר להשלים אחד מהם כך שהמקדמים של ההשלמה יהיו 0.
- (2) ההגדרה של הסכום בעצם אומרת שאנחנו בעצם עושים חיבור בנפרד לכל x^k .
- (3) שימו לב שגם אחרי שחיברנו קיבלנו עדיין את הצורה של פולינום. כלומר חיבור שני פולינומים נותן פולינום.

דוגמה

חשב את הסכום של הפולינומים $p(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ ו- $q(x) = -2x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 2x + 6$.

כפל פולינומים – הגדרה

יהיו $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ו- $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0$ שני פולינומים. פולינום המכפלה יוגדר להיות

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{k=0}^{n^2} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k$$

הערות

- (1) שוב כמו בחיבור ניתן להניח ששני הפולינומים הם סכומים עד אותו n משום שאפשר לעשות בדיוק את אותה ההשלמה.
- (2) שימו לב שהמכפלה היא גם מהצורה של פולינום. כלומר מכפלה של פולינומים היא פולינום.
- (3) אמנם הנוסחה נראית מפחידה אבל למעשה כפל של פולינומים פשוט יתבצע לפי פתיחת סוגריים שאנחנו מכירים.

דוגמה

חשב את מכפלת הפולינומים הבאים:

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$$

$$q(x) = x^5 - 1$$

דוגמה

ניקח את הפולינום $p(x) = x^2$.

(1) אם נחלק את $p(x)$ בפולינום $q(x) = x$ אז נקבל $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2}{x} = x$ שזה פולינום.

(2) אם נחלק את $p(x)$ בפולינום $q(x) = x^3$ אז נקבל $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$ שזה לא פולינום.

חלוקת פולינומים עם שארית

יהי $p(x)$ ו- $q(x)$ פולינומים.

אז קיימים $a(x), r(x)$ פולינומים יחידים כך ש:

$$\deg(r(x)) < \deg(q(x))$$

המקיימים:

$$p(x) = a(x)q(x) + r(x)$$

הערות

(1) בצורה הזו בעצם חילקנו את $p(x)$ ב- $q(x)$. דרך אחרת לכתוב את המשוואה הזו היא

$$\frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

(2) הפולינום $r(x)$ נקרא פולינום השארית ומעלתו קטנה ממש מהמעלה של הפולינום שבו חילקנו.

(3) שימו לב שמהטענה עולה שהפולינומים האלה יחידים כאשר $\deg(r(x)) < \deg(q(x))$.

(4) אם $r(x) = 0$ אז זה בדיוק אומר ש- $p(x)$ מתחלק ב- $q(x)$ ומסמנים זאת בסימון $q(x) | p(x)$.

דוגמה

יהיו $p(x) = x^4 - 2x^3 + 1$ ו- $q(x) = x^2 + 2$. מצא את $\frac{p(x)}{q(x)}$.

שורשים

שורש של פולינום – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

יהי $p(x)$ פולינום מעל $\mathbb{F}$.

$x_0 \in \mathbb{F}$ יקרא שורש של $p(x)$ אם מתקיים כי

$$p(x_0) = 0$$

הערות

(1) שורש זה בעצם איבר שאם נציב אותו בפולינום נקבל 0.

(2) השורשים של $p(x)$ הם למעשה פתרונות של המשוואה $p(x) = 0$.

דוגמאות

(1) עבור הפולינום $p(x) = x^2 - 2x + 1$, $x_0 = 1$ הוא שורש של הפולינום.

(2) לפולינום $p(x) = x^2 + 1$ אין שורשים ממשיים אבל יש שורשים מרוכבים $\pm i$.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

יהי $p(x)$ פולינום מעל $\mathbb{F}$ ויהי $x_0 \in \mathbb{F}$ שורש של $p(x)$.

אז קיים פולינום $a(x) \in \mathbb{F}[x]$ כך ש-

$$p(x) = (x - x_0)a(x)$$

הערות

- 1) מהמשוואה בעצם אנחנו מבינים שכל השורשים של $a(x)$ הם גם שורשים של $p(x)$.
- 2) משמעות נוספת היא ש- $p(x)$ מתחלק ב- $x - x_0$. כלומר אם מצאנו שורש אפשר לעשות חלוקת פולינומים ולמצוא את $a(x)$ ואז לעבוד עם פולינום ממעלה נמוכה יותר.

ריבוי של שורש – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

יהי $p(x)$ פולינום ויהי $x_0 \in \mathbb{F}$ שורש של $p(x)$.

הריבוי של x_0 הוא ה- $k \in \mathbb{N}$ המקסימלי כך ש- $(x - x_0)^k$ מחלק את $p(x)$.

הערה

כלומר אם מצאנו שורש אז באופן טבעי כדאי לבדוק מה הריבוי שלו. זה אומר שצריך לעשות חלוקות פולינומים עד שמגיעים לשלב שבו יש שארית שהיא לא 0. ברגע שהגענו לשם אז מצאנו את הריבוי.

נגזרת של פולינום – הגדרה

נסמן ב- $\mathbb{F}$ את המספרים המרוכבים או את המספרים הממשיים.

יהי $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ פולינום מעל $\mathbb{F}$.

הנגזרת של הפולינום היא הביטוי הבא

$$p'(x) = a_n \cdot n x^{n-1} + a_{n-1} \cdot (n-1) x^{n-2} + \dots + a_1$$

הערה

- 1) ניתן לחשוב על כך שבכל מעלה אנחנו מורידים את המעלה למקדם ושמים מעלה שקטנה ב- 1.
- 2) שימו לב שהנגזרת גם היא מהצורה של פולינום ולכן גם אותה ניתן לגזור. נסמן $p^{(k)}(x)$ את הנגזרת ה- k של p .

דוגמה

גזור את הפולינום $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 5x + 3$.

טענה

נסמן ב- $\mathbb{F}$ את המספרים המרוכבים או את המספרים הממשיים.

יהי $p(x)$ פולינום מעל $\mathbb{F}$ ויהי x_0 שורש של הפולינום.

x_0 הוא שורש מריבוי k אם ורק אם

$$p(x_0) = 0$$

$$p^{(1)}(x_0) = 0$$

$$\vdots$$

$$p^{(k-1)}(x_0) = 0$$

$$p^{(k)}(x_0) \neq 0$$

הערה

כלומר כדי למצוא ריבוי של שורש, אנחנו נגזור ונציב עד שנגיע לנגזרת שההצבה לא נותנת אפס וזה יהיה הריבוי.

דוגמה

יהי $p(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$ ונתון כי 1 הוא שורש של הפולינום.

מצא את הריבוי של 1.

טענה

יהי $p(x)$ פולינום עם מקדמים ממשיים ויהי $z \in \mathbb{C}$ שורש של $p(x)$, אז גם $\bar{z}$ הוא שורש של $p(x)$.

הערה

- (1) שימו לב שהטענה הזו נכונה רק כאשר p עם מקדמים ממשיים, אם המקדמים הם מרוכבים אז הטענה כבר לא נכונה.
- (2) מהטענה הזו זה אומר שאם אנחנו יודעים על שורש מרוכב לפולינום עם מקדמים ממשיים אז אנחנו בעצם יודעים שורש נוסף שהוא הצמוד שלו.

דוגמה

עבור הפולינום $p(x) = x^2 + 1$ אנחנו יודעים ש- i הוא שורש שלו ומהטענה גם $-i$ הוא שורש ואנחנו יודעים שזה אכן המצב.

המשפט היסודי של האלגברה

יהי

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

כאשר $a_n \neq 0$

פולינום עם מקדמים מרוכבים, אז קיימים n שורשים (לאו דווקא שונים) מרוכבים ל- $p(x)$.

במילים אחרות: ניתן לכתוב את הפולינום בצורה הבאה:

$$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

הערות

(1) השורשים לא בהכרח שונים. כלומר שורש x_i יכול להופיע בריבוי k ואז הביטוי $x - x_i$ יופיע k פעמים בביטוי.

(2) המשפט נכון גם אם המקדמים של הפולינום כולם ממשיים. שימו לב אבל שבמצב הזה מובטח שהשורשים יהיו מרוכבים אבל לא מובטח שהם יהיו ממשיים.

נוסחאות ויאטה

יהי

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

כאשר $a_n \neq 0$

פולינום עם מקדמים מרוכבים ויהיו $x_1, x_2, \dots, x_n$ השורשים המרוכבים שלו.

$$\sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\prod_{k=1}^n x_k = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}$$

הערות

- (1) שימו לב ש- $x_1, x_2, \dots, x_n$ השורשים מובטחים מהמשפט היסודי.
- (2) אנחנו נראה שבהרבה פעמים שנחפש שורשים אז ננחש שורשים ואז נשתמש בויאטה כדי למצוא את מי שנשאר.

מטריצות

הגדרות בסיסיות ופעולות חשבון

מטריצה – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

מערך מלבני בעל m שורות ו- n עמודות של איברים מ- $\mathbb{F}$ יקרא מטריצה.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

כאשר $a_{i,j} \in \mathbb{F}$ לכל i, j .

הערה

- (1) האינדקס השמאלי מייצג את מספר השורה והאינדקס הימני מייצג את מספר העמודה.
- (2) אנחנו מסמנים ב- $\mathbb{F}^{m \times n}$ את כל המטריצות מגודל $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$. כלומר $\mathbb{R}^{m \times n}$ זה כל המטריצות הממשיות מגודל $m \times n$ ו- $\mathbb{C}^{m \times n}$ זה כל המטריצות המרוכבות.
- (3) הסימון $\mathbb{F}^n$ מייצג את $\mathbb{F}^{n \times 1}$ או את $\mathbb{F}^{1 \times n}$.
- (4) אנחנו מסמנים ב- $(A)_{i,j}$ או ב- $a_{i,j}$ את האיבר במקום ה- i, j של A .

דוגמאות

- (1) המטריצה $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ היא מטריצה ממשית מגודל 4×1 . כלומר היא שייכת ל- $\mathbb{R}^4$.

- (2) המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ היא מטריצה ממשית מגודל 4×3 .

שוויון מטריצות – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו A, B שתי מטריצות מעל $\mathbb{F}$.

$A = B$ אם מתקיים

(1) A, B מאותו גודל.

(2) לכל i, j מתקיים $a_{i,j} = b_{i,j}$.

דוגמאות

(1) המטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ הן שוות.

(2) המטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ הן לא שוות.

(3) המטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ הן לא שוות.

הערה

בצורה מפורשת ההגדרה של שוויון נראית קצת מיותרת אבל כשנסתכל על מטריצות בצורה מופשטת אז נרצה להגיד בדיוק מה זה אומר שוויון ומה זה אומר אי שוויון.

חיבור מטריצות – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו A, B מטריצות מגודל $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$.

מטריצת הסכום מוגדרת להיות המטריצה שאיבריה הם:

$$(A + B)_{i,j} = (A)_{i,j} + (B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

הערה

- (1) החיבור של מטריצות מוגדר לפי חיבור כל איבר בנפרד.
- (2) שימו לב שהחיבור מוגדר רק למטריצות שהן מאותו גודל.

בואו נראה את זה בדוגמה.

דוגמה

חשב את הסכום של המטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

כפל מטריצה בסקלר – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, תהא A מטריצה מגודל $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$.

המטריצה $\alpha \cdot A$ מוגדרת להיות המטריצה שאיבריה הם:

$$(\alpha \cdot A)_{i,j} = \alpha \cdot (A)_{i,j} = \alpha \cdot a_{i,j}$$

הערה

כפל של סקלר במטריצה הוא פשוט לכפול את כל האיברים של המטריצה בסקלר.

דוגמה

חשב את הכפל

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

כפל מטריצות – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהינה A מטריצה מגודל $m \times n$ ו- B מטריצה מגודל $n \times k$.

המטריצה AB מגודל $m \times k$ מוגדרת להיות המטריצה שאיבריה הם

$$(AB)_{i,j} = \sum_{t=1}^n a_{i,t} \cdot b_{t,j}$$

הערות

(1) שימו לב שכפל מטריצות מוגדר לגדלים מאד ספציפיים של מטריצות. הכפל מוגדר רק כאשר מספר העמודות של A שווה למספר השורות של B . אם זה לא המצב אז הכפל לא מוגדר.

(2) יכול להיות שהמכפלה AB מוגדרת אבל BA לא מוגדרת.

דוגמה

חשב את הכפל AB של המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

הערה

כדי לחשב את האיבר ה- i, j של המכפלה נעשה כפל איבר איבר של השורה ה- i ב- A והעמודה ה- j של B .

דוגמה

חשב את המכפלה AB של

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

מכפלה של מטריצה בעמודה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, תהא A מטריצה מגודל $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$

$$A = (A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_n)$$

כאשר $A_1, A_2, \dots, A_n$ הם העמודות של A .

ותהא v מטריצת עמודה מגודל $n \times 1$ מעל $\mathbb{F}$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

אז מתקיים כי

$$Av = v_1 \cdot A_1 + v_2 \cdot A_2 + \dots + v_n \cdot A_n$$

הערה

- (1) שימו לב שבצד שמאל מההגדרה של מכפלת מטריצות נקבל מטריצה מגודל $m \times 1$ ומצד ימין יש לנו סכום של עמודות מגודל $m \times 1$ ולכן מבחינת הגדלים זה מסתדר.
- (2) דרך נוספת לחישוב מכפלה של מטריצה בעמודה היא לחשב את הסכום של העמודות לפי הנוסחה בצד ימין.
- (3) דרך הסתכלות זו היא חשובה לנו מאד וזו נוסחה מאד חשובה לזכור.

מכפלת מטריצות – הסתכלות נוספת

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$ ותהא B מטריצה מגודל $n \times k$ מעל $\mathbb{F}$

$$B = (B_1 \quad B_2 \quad \dots \quad B_k)$$

אז מתקיים כי

$$AB = (AB_1 \quad AB_2 \quad \dots \quad AB_k)$$

הערות

- (1) שימו לב שהמכפלה AB_i מוגדרת שכן A מגודל $m \times n$ ו- B_i מגודל $n \times 1$.
- (2) AB_i זו העמודה ה- i של המכפלה.
- (3) אנחנו כבר יודעים איך לחשב מכפלה של מטריצה בעמודה לפי נוסחה ולכן הנוסחה הזאת משלימה לנו למכפלה כללית של מטריצות.
- (4) גם זו הסתכלות מאד חשובה ולכן חשוב לזכור אותה.

דוגמה

חשב את המכפלה לפי הנוסחה של AB .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

תכונות של חיבור מטריצות

יהי $\mathbb{F}$ שדה, תהיינה $A, B, C \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מטריצות ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$.

$$A + B = B + A \quad (1)$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (2)$$

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B \quad (3)$$

תכונות של כפל מטריצות

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהיינה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times k}, C \in \mathbb{F}^{k \times l}$ מטריצות ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$.

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad (1)$$

$$\alpha \cdot (AB) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) \quad (2)$$

הערות

(1) אם אנחנו מכפילים בסקלר מכפלה של מטריצות אז ניתן להזיז אותו לאן שנרצה.

(2) אין חילופיות (קמומטטיביות) בכפל מטריצות.

דוגמה

יהיו

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חשב את המכפלות AB ו- BA .

תכונה משותפת

יהי $\mathbb{F}$ שדה, תהא A מטריצה מגודל $m \times n$ ו- B, C מטריצות מגודל $n \times k$ אז מתקיים:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

מטריצות מיוחדות והגדרות נוספות

מטריצה ריבועית – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

מטריצה מגודל $n \times n$ מעל $\mathbb{F}$ תקרא מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{F}$.

הערה

(1) היא נקראת ריבועית משום שמספר השורות שלה שווה למספר העמודות, כלומר המטריצה היא בעצם "ריבוע" שבו הצלעות שלו שוות.

(2) ניתן להגיד ש- A היא ריבועית מגודל n או ריבועית מגודל $n \times n$. שניהם יגידו ש- $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

(3) במטריצות ריבועיות מגדלים שווים תמיד שתי המכפלות מוגדרות וגם ניתן להגדיר חזקה של מטריצה ריבועית בתור מכפלה של k פעמים את המטריצה.

דוגמה

המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ היא ריבועית.

עקבה של מטריצה – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$ מעל $\mathbb{F}$.

העקבה של A אשר מסומנת ב- $tr(A)$ היא:

$$tr(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n} = \sum_{k=1}^n a_{k,k}$$

הערה

- (1) לאיברים $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ אנחנו קוראים איברי האלכסון של A .
- (2) העקבה של A היא סכום איברי האלכסון.
- (3) העקבה מוגדרת עבור מטריצות ריבועיות בלבד.

דוגמה

חשב את $tr(A)$ של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

עקבה – תכונות

יהי $\mathbb{F}$ שדה, תהיינה A, B מטריצות ריבועיות מגודל n מעל $\mathbb{F}$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$.

$$tr(A + B) = tr(A) + tr(B) \quad (1)$$

$$tr(\alpha \cdot A) = \alpha \cdot tr(A) \quad (2)$$

$$tr(AB) = tr(BA) \quad (3)$$

דוגמה

חשב את $tr(AB)$ ו- $tr(BA)$ של המטריצות

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

מטריצת האפס – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

מטריצת האפס מגודל $m \times n$ היא המטריצה שכל איבריה הם אפסים.

הערה

ניתן לסמן ב- $0_{m \times n}$ את מטריצת האפס מגודל $m \times n$.

דוגמה

(1) המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ היא מטריצת האפס מגודל 2×3 .

(2) המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ היא מטריצת האפס מגודל 3×3 .

מטריצת האפס – תכונות

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $m \times n$.

$$A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A \quad (1)$$

$$A \cdot 0_{n \times k} = 0_{m \times k} \quad (2)$$

$$0_{k \times m} \cdot A = 0_{k \times n} \quad (3)$$

דוגמה

המכפלה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הערה

אפשר לחשוב על מטריצת האפס כמו המספר 0 בממשיים. להכפיל בו נותן את מטריצת האפס והוא לא משפיע על פעולת החיבור אבל הוא לא מתנהג כמו 0 בממשיים.

מטריצת היחידה – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

מטריצת היחידה מגודל n היא מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$ כך שבאלכסון שלה יש 1 ומחוץ לאלכסון יש 0.

הערות

- (1) שימו לב שבניגוד למטריצת האפס, מטריצת היחידה היא תמיד ריבועית.
- (2) ניתן לסמן את מטריצת היחידה ב- I או ב- I_n .

דוגמאות

- (1) מטריצת היחידה מגודל 2 היא המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (2) מטריצת היחידה מגודל 4 היא המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

מטריצת היחידה – תכונות

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$.

$$A \times I_n = A \quad (1)$$

$$I_m \times A = A \quad (2)$$

דוגמה

המכפלה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

הערה

ניתן לחשוב על מטריצת היחידה כמו על 1 בממשיים, היא לא משפיעה על פעולת הכפל.

מטריצה משולשת עליונה/תחתונה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

מטריצה משולשת עליונה/תחתונה מעל $\mathbb{F}$ היא מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{F}$ שבה כל האיברים שמתחת/מעל האלכסון הם אפסים.

הערה

שימו לב שמטריצה משולשת עליונה/תחתונה היא תמיד ריבועית.

דוגמאות

(1) המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ היא משולשת עליונה.

(2) המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ היא משולשת תחתונה.

מטריצה משולשת – תכונות

- (1) מכפלה של מטריצות משולשות עליונות היא משולשת עליונה.
- (2) מכפלה של מטריצות משולשות תחתונות היא משולשת תחתונה.

דוגמה

המכפלה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 17 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

מטריצה אלכסונית – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

מטריצה אלכסונית היא מטריצה ריבועית שמחוץ לאלכסון שלה יש אפסים.

דוגמאות

(1) מטריצת היחידה מכל גודל היא אלכסונית.

(2) מטריצת האפס מגודל $n \times n$ היא אלכסונית.

(3) המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ היא אלכסונית.

הערות

(1) מטריצה אלכסונית היא תמיד ריבועית.

(2) מטריצה אלכסונית היא בפרט גם משולשת עליונה וגם משולשת תחתונה.

(3) קל להעלות בחזקה מטריצה אלכסונית. פשוט צריך להעלות בחזקה את איברי האלכסון.

מטריצה סקלרית – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

מטריצה סקלרית היא מטריצה אלכסונית שכל איברי האלכסון שלה שווים.

הערה

למעשה מטריצה סקלרית היא מטריצה מהצורה $\alpha \cdot I$ כאשר $\alpha \in \mathbb{F}$.

דוגמאות

(1) מטריצת היחידה מכל גודל היא מטריצה סקלרית.

(2) מטריצת האפס מגודל $n \times n$ היא סקלרית.

(3) המטריצה $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ היא סקלרית.

מטריצה סקלרית – תכונות

מטריצה סקלרית מתחלפת עם כל מטריצה בכפל. (כששתי המכפלות מוגדרות)

שחלוף – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$.

המטריצה המשוכללת של A שתסומן ב- A^t היא מטריצה מגודל $n \times m$ שאיבריה הם:

$$(A^t)_{i,j} = a_{j,i}$$

דוגמה

מצא את A^t של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

הערה

- (1) ניתן לחשוב על פעולת השחלוף בתור הפעולה שהופכת את השורות של A לעמודות של A^t .
- (2) ניתן לחשוב על פעולת השחלוף בתור הפעולה שהופכת את העמודות של A לשורות של A^t .
- (3) פעולת השחלוף נקראת גם לעשות טרנספוז.

תכונות

יהי $\mathbb{F}$ שדה, תהיינה A, B מטריצות מגודל $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$ ו- C מטריצה מגודל $n \times k$ מעל $\mathbb{F}$.

$$(A^t)^t = A \quad (1)$$

$$(A + B)^t = A^t + B^t \quad (2)$$

$$(A \cdot C)^t = C^t \cdot A^t \quad (3)$$

הערה

שימו לב שלעשות שחלוף על מכפלה הופך את סדר המכפלה.

מטריצה סימטרית – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$.

A היא מטריצה סימטרית אם מתקיים כי $A^t = A$.

דוגמה

המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ היא מטריצה סימטרית.

הערות

- 1) המטריצות נקראות סימטריות בגלל שיש סימטריה סביב האלכסון של המטריצה.
- 2) ניתן בקלות להבין אם מטריצה מפורשת היא סימטרית על ידי בדיקה של האיברים המתאימים.

מטריצה סימטרית – תכונות

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהיינה A, B מטריצות מגודל $m \times n$ מעל $\mathbb{F}$.

- 1) אם A, B סימטריות אז גם $A + B$ סימטרית.
- 2) אם A ריבועית אז $A + A^t$ סימטרית.
- 3) המטריצות AA^t ו- A^tA הן סימטריות.

הערה

כל התכונות נובעות מהתכונות של פעולת השחלוף.

מטריצה אנטי סימטרית – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$ מעל $\mathbb{F}$.

A היא מטריצה אנטי סימטרית אם מתקיים כי $A^t = -A$.

דוגמה

המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ היא אנטי סימטרית.

הערה

ניתן לבדוק די בקלות אם מטריצה היא אנטי סימטרית על ידי בדיקה שהאיברים המתאימים הם בסימנים מנוגדים ושבאלכסון יש 0.

מטריצה אנטי סימטרית – תכונות

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהיינה A, B מטריצות מאותו גודל מעל $\mathbb{F}$.

(1) אם A, B אנטי סימטריות אז $A + B$ אנטי סימטרית.

(2) אם A ריבועית אז $A - A^t$ אנטי סימטרית.

(3) איברי האלכסון של מטריצה אנטי סימטרית הם אפסים.

מערכת משוואות לינאריות

הגדרות בסיסיות

מערכת משוואות לינאריות – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

מערכת של m משוואות ו- n נעלמים מהצורה

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2$$

$\vdots$

$$a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m$$

כאשר $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{F}$ נקראת מערכת משוואות לינאריות מעל $\mathbb{F}$.

הערות

- (1) $a_{i,j}$ נקראים המקדמים של המערכת.
- (2) b_i נקראים המקדמים החופשיים של המערכת.
- (3) x_i נקראים הנעלמים (או המשתנים) של המערכת.
- (4) בכל משוואה כל נעלם יכול להופיע עם חזקה 1 בלבד או לא להופיע אם המקדם שלו הוא 0.
- (5) אם יש מעט נעלמים אז לרוב מסמנים אותם באותיות x, y, z, w .

דוגמאות

(1) מערכת המשוואות

$$x - 3y + z = 4$$

$$2x - 5z = 3$$

היא מערכת משוואות לינאריות.

(2) מערכת המשוואות

$$x^2 - 3y = 2$$

$$4x - 3y = 5$$

היא לא מערכת משוואות לינאריות.

פתרון של מערכת משוואות לינאריות – הגדרה

פתרון למערכת משוואות לינאריות הוא הצבה של הנעלמים כך שכל המשוואות מתקיימות.

דוגמה

ההצבה $x = -1$ ו- $y = 2$ היא פתרון למערכת המשוואות הלינארית

$$x + y = 1$$

$$x - y = -3$$

הערה

למערכת משוואות לינאריות יכול להיות פתרון יחיד, יכול להיות שיש יותר מפתרון אחד וגם יכול להיות שאין פתרון.

הצגה מטריצית

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

כל מערכת משוואות לינאריות של m משוואות ו- n נעלמים ניתנת להצגה מהצורה

$$A\bar{x} = \bar{b}$$

כאשר $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ נקראת מטריצת המקדמים, $\bar{x} \in \mathbb{F}^n$ נקראת עמודת הנעלמים ו- $\bar{b} \in \mathbb{F}^m$ נקראת עמודת המקדמים החופשיים.

דוגמה

העבר לצורה מטריצית את מערכת המשוואות הלינאריות

$$3x - 2y + z = 1$$

$$5x + y - z = 0$$

$$x + y + z = 4$$

הערות

- (1) שימו לב שממכפלת מטריצות באמת נקבל שזה מייצג את המערכת המקורית.
- (2) הסדר שבה אנחנו מסדרים את המקדמים במטריצה חשוב. אם קבענו סדר מסוים במשוואה הראשונה אז נדבוק בו בכל שאר המשוואות.

מטריצת המערכת – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא $A\bar{x} = \bar{b}$ מערכת משוואות לינאריות.

מטריצת המערכת של $A\bar{x} = \bar{b}$ היא המטריצה

$$A^* = (A|\bar{b})$$

הערה

- (1) מטריצת המערכת היא מטריצת המקדמים שהוספנו לה עמודה נוספת שהיא עמודת המקדמים החופשיים.
- (2) מומלץ להפריד ביניהם בקו לצורך נוחות שלנו.

דוגמה

מטריצת המערכת של מערכת המשוואות הלינאריות

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

היא

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

פעולות אלמנטריות

פעולות אלמנטריות – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $m \times n$.

ישנן 3 פעולות אלמנטריות על שורות המטריצה A .

(1) הכפלת שורה כלשהי ב- A ב- $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \neq 0$.

(2) החלפת שתי שורות כלשהן ב- A .

(3) הוספת שורה כלשהי מוכפלת ב- $\alpha \in \mathbb{F}$ לשורה אחרת ב- A .

הערות

(1) הסימון של הפעולה הראשונה הוא $R_i \rightarrow \alpha R_i$. שימו לב ש- $\alpha \neq 0$.

(2) הסימון של הפעולה השנייה הוא $R_i \leftrightarrow R_j$.

(3) הסימון של הפעולה השלישית הוא $R_i \rightarrow R_i + \alpha R_j$.

(4) אחרי ביצוע פעולה אלמנטרית מתקבלת מטריצה חדשה.

(5) ניתן להגדיר בצורה אנלוגית פעולות אלמנטריות על עמודות A .

דוגמה

תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ מטריצה.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} R_1 \rightarrow 5R_1 \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} R_1 \leftrightarrow R_2 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} R_2 \rightarrow R_2 + 2R_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

הערה

האינטואיציה לפעולות האלמנטריות היא שאם נחשוב על השורות של המטריצה בתור משוואות (כמו במטריצת המערכת) אז לעשות את אחת מהפעולות האלה על משוואה לא משנה את הפתרון של המערכת. המסקנה היא שאם נעשה פעולות אלמנטריות על מטריצת המערכת לא נשנה את הפתרון של המערכת.

מטריצות שקולות שורה – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$.

A, B תקרא שקולות שורה אם ניתן להגיע מ- A ל- B בעזרת סדרה סופית של פעולות אלמנטריות.

דוגמה

המטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

הן שקולות שורה.

הערות

(1) אם ניתן להגיע מ- A ל- B בעזרת פעולות אלמנטריות אז ניתן להגיע גם מ- B ל- A עם פעולות אלמנטריות.

(2) אם A, B שקולות שורה וגם B, C שקולות שורה אז גם A, C שקולות שורה.

הדירוג של גאוס

איבר מוביל – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $m \times n$.

אם השורה ה- i של A אינה שורת אפסים אז האיבר המוביל של השורה ה- i הוא האיבר הראשון משמאל שאינו 0.

דוגמה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ תהא}$$

- (1) האיבר המוביל של השורה הראשונה הוא 3.
- (2) השורה השנייה היא שורת אפסים ולכן אין לה איבר מוביל.
- (3) האיבר המוביל של השורה השלישית הוא 2.

מטריצה מדורגת – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $m \times n$.

A תקרא מטריצה מדורגת אם מתקיים:

- (1) כל שורות האפסים ב- A , אם יש כאלה, נמצאים בתחתית של A .
- (2) אם $i_1 < i_2$ והשורות i_1, i_2 אינן שורות אפסים אז האיבר המוביל של השורה ה- i_2 נמצא מימין לאיבר המוביל של השורה ה- i_1 .

הערה

- (1) התנאי השני פשוט אומר שאיבר מוביל של שורה נמוכה יותר במטריצה צריך להיות מימין לאיבר מוביל של שורה גבוהה ממנה.
- (2) אפשר לחשוב על זה שאפשר ממש לצייר מדרגות בין האיברים המובילים.

דוגמאות

(1) המטריצה $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ אינה מדורגת.

(2) המטריצה $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ היא מדורגת.

(3) המטריצה $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ היא מדורגת.

מטריצה מדורגת קנונית – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $m \times n$.

A תקרא מדורגת קנונית אם מתקיים:

- (1) A מדורגת.
- (2) האיבר המוביל של כל שורה שאינה שורת אפסים הוא 1.
- (3) בכל עמודה שיש בה איבר מוביל אז שאר העמודה אפסים.

דוגמאות

(1) אינה מדורגת קנונית.
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) אינה מדורגת קנונית.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) מדורגת קנונית.
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

משפט

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $m \times n$.

קיימת מטריצה מדורגת קנונית יחידה B כך ש- A, B שקולות שורה.

הערות

(1) מטריצה מדורגת קנונית היא בפרט מדורגת.

(2) מהמשפט אנחנו מבינים שתמיד אפשר להגיע בעזרת פעולות אלמנטריות מ- A לאיזשהי מטריצה מדורגת.

הדירוג של גאוס – הגדרה

התהליך בו אנחנו מביאים את מטריצת המערכת לצורה מדורגת בעזרת פעולות אלמנטריות נקראת הדירוג של גאוס.

דוגמה

מצא את הפתרון של המערכת

$$x + 4y - z = 3$$

$$3x + 13y - 3z = 10$$

$$x + 5y = 4$$

הערות

(1) אם במהלך הדירוג של מטריצת המערכת הגענו לשורה שבחלק של מטריצת המקדמים יש רק אפסים ובחלק של המקדם החופשי אין אפס אז השורה הזו נקראת שורת סתירה וזה אומר שאין פתרון.

(2) משתנה שבעמודה שלו בסוף הדירוג אין איבר מוביל נקרא משתנה חופשי ואז נציג את כל המשתנים עם מקדם מוביל בעזרת המשתנים החופשיים. מצב זה אומר שיש לנו יותר מפתרון אחד.

חקירת מערכת משוואות לינאריות

מערכת משוואות לינאריות הומוגנית ואי הומוגנית – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא $\bar{b}$ מערכת משוואות לינאריות.

(1) אם $\bar{b} = \bar{0}$ אז המערכת נקראת מערכת הומוגנית.

(2) אם $\bar{b} \neq \bar{0}$ אז המערכת נקראת מערכת אי הומוגנית.

הערות

(1) $\bar{0}$ זה סימון נוסף לעמודת אפסים.

(2) כאשר נכתוב את מטריצת המערכת של מערכת הומוגנית אז נכתוב פשוט את מטריצת המקדמים משום שתמיד תשאר עמודת אפסים לא משנה איזה פעולה נעשה בדירוג אז לא צריך לכתוב את זה.

טענה

תהא $A\bar{x} = \bar{0}$ מערכת הומוגנית מעל הממשיים או המרוכבים.

אז יש שתי אפשרויות לכמות הפתרונות:

(1) פתרון יחיד שהוא $\bar{x} = \bar{0}$.

(2) אינסוף פתרונות.

הערה

נשים לב שבמערכת הומוגנית תמיד $\bar{x} = \bar{0}$ הוא פתרון ולכן אין את המצב של אין פתרון.

טענה

תהא $A\bar{x} = \bar{b}$ מערכת אי הומוגנית מעל הממשיים או המרוכבים.

יש שלוש אפשרויות עבור כמות הפתרונות:

- (1) אין פתרון.
- (2) פתרון יחיד.
- (3) אינסוף פתרונות.

טענה

תהא $A\bar{x} = \bar{b}$ מערכת אי הומוגנית ויהא v^* פתרון למערכת.

אז

$$\{v | Av = \bar{b}\} = \{v^* + w | Aw = \bar{0}\}$$

הערות

- (1) המערכת $A\bar{x} = \bar{0}$ נקראת המערכת ההומוגנית המתאימה של $A\bar{x} = \bar{b}$.
- (2) הטענה אומרת שאם למערכת האי הומוגנית יש פתרון אז כל הפתרונות שלה הם מהצורה של הפתרון הפרטי ועוד פתרון למערכת ההומוגנית המתאימה.

מסקנה

תהא $A\bar{x} = \bar{b}$ מערכת אי הומוגנית כך שיש לה פתרון.
אז יש פתרון יחיד למערכת אם ורק אם יש פתרון יחיד למערכת ההומוגנית המתאימה.

הערות

- (1) זה אומר שמספר הפתרונות זהה בין שני המערכות אם למערכת האי הומוגנית יש פתרון.
- (2) אם למערכת האי הומוגנית אין פתרון אז המשפט כמובן לא נכון משום שלמערכת ההומוגנית תמיד יש פתרון כלשהו.

דרגה של מטריצה – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $m \times n$.

נסמן ב- B את המטריצה המדורגת הקנונית ששקולת שורות ל- A .

הדרגה של A שנסמנה ב- $r(A)$ מוגדרת להיות מספר השורות ששונות משורת אפסים במטריצה B .

הדרגה של A תקרא מלאה אם $r(A) = n$.

הערות

- (1) הדרגה נקראת מלאה אם היא שווה למספר העמודות של A .
- (2) אם מטריצות הן שקולות שורה אז יש להן את אותה הדרגה.
- (3) כדי למצוא דרגה של מטריצה אנחנו נדרג אותה לקנונית ואז נספור כמה שורות שונות מאפס יש בה.
- (4) מספיק גם לדרג עד למדורגת ולספור שם את מספר השורות ששונות מאפס.

דוגמה

מצא את הדרגה של $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

משפט

תהא $A\bar{x} = \bar{b}$ מערכת משוואות לינאריות מעל הממשיים או המרוכבים כך ש- A מטריצה מגודל $m \times n$ ונסמן ב- $A^* = (A|\bar{b})$ את מטריצת המערכת.

- (1) למערכת אין פתרון אם ורק אם $r(A) \neq r(A^*)$.
- (2) למערכת יש פתרון יחיד אם ורק אם $r(A) = r(A^*) = n$.
- (3) למערכת יש אינסוף פתרונות אם ורק אם $r(A) = r(A^*) < n$. במקרה זה יש $n - r(A)$ משתנים חופשיים במערכת.

הערות

כדי להבין את כמות הפתרונות עלינו לבדוק מה דרגת מטריצת המקדמים ומה הדרגה של מטריצת המערכת ומהמשפט נבין כמה פתרונות יש.

מרחבים וקטורים

הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא V קבוצה עם פעולת חיבור של שני איברים ב- V ופעולת כפל של סקלר מ- $\mathbb{F}$ באיבר מ- V .

V תקרא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ אם מתקיים:

- (1) סגירות לחיבור: לכל $v, u \in V$ מתקיים $v + u \in V$.
- (2) חילופיות החיבור: לכל $v, u \in V$ מתקיים $v + u = u + v$.
- (3) קיבוציות החיבור: לכל $v, u, w \in V$ מתקיים $v + (u + w) = (v + u) + w$.
- (4) קיום אדיש חיבורי: קיים $\bar{0} \in V$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים $v + \bar{0} = \bar{0} + v = v$.
- (5) קיום נגדי לחיבור: לכל $v \in V$ קיים $w \in V$ כך ש- $v + w = \bar{0}$.
- (6) סגירות לכפל בסקלר: לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ו- $v \in V$ מתקיים $\alpha \cdot v \in V$.
- (7) קיבוץ הכפל בסקלר: לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$ מתקיים $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta v)$.
- (8) הסקלר 1 הוא אדיש לכפל בסקלר: לכל $v \in V$ מתקיים $1 \cdot v = v$.
- (9) פילוג סקלרים: לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$ מתקיים $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.
- (10) פילוג וקטורים: לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $v, u \in V$ מתקיים $\alpha \cdot (v + u) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot u$.

הערה

- (1) בקורס אנחנו בדרך כלל נעבוד עם מרחבים מוכרים ולא נצטרך לבדוק כל הזמן את ההגדרה הזו.
- (2) שימו לב ש- $\bar{0}$ זהו סימון לוקטור האפס במרחב. לעיתים מסמנים אותו פשוט ב- 0 ומההקשר אנחנו צריכים להבין אם זה וקטור האפס או האפס של השדה.

דוגמאות

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

- (1) המרחב $\mathbb{F}^n$ שהוא מרחב כל העמודות/השורות עם איברים מ- $\mathbb{F}$ עם הפעולות הרגילות של חיבור עמודות וכפל סקלר בעמודה הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.
- (2) המרחב $\mathbb{F}_n[x]$ שהוא כל הפולינומים ממעלה לכל היותר n עם מקדמים ב- $\mathbb{F}$ עם הפעולות הרגילות של חיבור פולינומים וכפל סקלר בפולינום הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.
- (3) המרחב $\mathbb{F}^{m \times n}$ שהוא מרחב כל המטריצות מגודל $m \times n$ עם איברים מ- $\mathbb{F}$ עם הפעולות הרגילות של חיבור מטריצות וכפל סקלר במטריצה הוא מרחב וקטורי $\mathbb{F}$.

הערה

לרוב בקורס אנחנו נעבוד עם מרחבים מעל השדות $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

- (1) לכל $v \in V$ מתקיים $0 \cdot v = \bar{0}$.
- (2) לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$.
- (3) לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$ אם $\alpha \cdot v = \bar{0}$ אז $\alpha = 0$ או $v = \bar{0}$.
- (4) האדיש החיבורי ב- V הוא יחיד.
- (5) לכל $v \in V$ קיים $w \in V$ שהוא נגדי לו והוא יחיד.
- (6) לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$ מתקיים $(-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -(\alpha \cdot v)$.

תת מרחב וקטורי

תת מרחב וקטורי – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

$W \subseteq V$ עם הפעולות המושרות מ- V יקרא תת מרחב וקטורי של V אם W הוא מרחב וקטורי עם הפעולות האלו מעל $\mathbb{F}$.

הערה

כלומר תת מרחב וקטורי הוא תת קבוצה של V שעם הפעולות הרגילות של V הוא מקיים את ההגדרה של מרחב וקטורי.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ויהא $W \subseteq V$ תת קבוצה.

W הוא תת מרחב וקטורי אם ורק אם

$$(1) \quad \bar{0} \in W$$

$$(2) \quad W \text{ סגורה לחיבור: לכל } u, w \in W \text{ מתקיים } u + w \in W$$

$$(3) \quad W \text{ סגורה לכפל בסקלר: לכל } w \in W \text{ ולכל } \alpha \in \mathbb{F} \text{ מתקיים } \alpha w \in W$$

הערה

(1) כלומר כדי לבדוק האם תת קבוצה היא מרחב וקטורי עלינו רק לבדוק ששלושת התנאים האלו מתקיימים.

(2) חיתוך תתי מרחבים הוא תת מרחב וקטורי.

דוגמה

הראה כי $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ היא תת מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$.

מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $m \times n$.

הקבוצה

$$\{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = \bar{0}\} \subseteq \mathbb{F}^n$$

נקראת מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\bar{x} = \bar{0}$.

דוגמה

הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} x - 3y + z = 0 \\ 5x + 6y - 7z = 0 \end{array} \right\}$$

היא מרחב פתרונות של מערכת הומוגנית.

טענה

מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית הוא תת מרחב וקטורי של $\mathbb{F}^n$.

הערה

אם זיהינו שתת קבוצה היא מרחב פתרונות של איזשהי מערכת הומוגנית אז בוודאות היא תת מרחב וקטורי.

הערה

שימו לב שמרחב הפתרונות של מערכת אי הומוגנית הוא אינו מרחב וקטורי שכן $\bar{0}$ אינו פתרון של מערכת אי הומוגנית, כלומר אינו שייך למרחב, ולכן התנאי הראשון במשפט של תתי מרחבים לא מתקיים.

צירוף לינארי

צירוף לינארי – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $w, v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ וקטורים. w יקרא צירוף לינארי של $v_1, v_2, \dots, v_k$ אם קיימים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$$

הערה

w הוא סכום סופי של סקלרים מוכפלים בוקטורים $v_1, v_2, \dots, v_k$.

דוגמה

הוקטור $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ הוא צירוף לינארי של $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

הערה

יכול להיות מצב שיש וקטורים שהם לא צירוף לינארי של $v_1, v_2, \dots, v_k$.

המרחב הנפרש – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ותהא $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ וקטורים.

המרחב הנפרש על ידי A מוגדר להיות

$$\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}\}$$

הערה

- (1) אפשר לסמן את המרחב הזה גם ב- $Sp(A)$ או ב- $sp(A)$.
- (2) אם w שייך לקבוצה הזו אז w הוא צירוף לינארי של $v_1, v_2, \dots, v_k$.

דוגמה

הראה כי המרחב הנפרש על ידי $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ הוא

$$\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$$

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ותהא $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ וקטורים.

המרחב הנפרש $\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ הוא תת מרחב וקטורי.

הערה

דרך מאד קלה ליצור מרחב וקטורי היא לקחת וקטורים ממרחב קיים ואז להסתכל על המרחב הנפרש על ידם.

מרחב השורות ומרחב העמודות של מטריצה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $m \times n$.

- (1) מרחב השורות של A שיוסמן ב- $Row(A)$ הוא המרחב הנפרש על ידי השורות של המטריצה.
- (2) מרחב העמודות של A שיוסמן ב- $Col(A)$ הוא המרחב הנפרש על ידי העמודות של המטריצה.

דוגמה

תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

מתקיים כי

$$Col(A) = span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$Row(A) = span((1 \ 0 \ 2), (0 \ 1 \ 2))$$

קבוצה פורשת – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ותהא $A = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ תת קבוצה סופית של וקטורים.

נאמר ש- A קבוצה פורשת ל- V אם מתקיים כי $\text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k) = V$.

במצב זה נאמר ש- V הוא מרחב נפרש סופית.

הערה

להגיד ש- A פורשת את W אומר שכל וקטור ב- W הוא צירוף לינארי של הוקטורים ב- A .

דוגמאות

(1) הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ היא קבוצה פורשת ל- $\mathbb{R}^3$.

(2) בצורה כללית יותר הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ היא קבוצה פורשת ל- $\mathbb{F}^n$.

(3) הקבוצה $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ היא קבוצה פורשת ל- $\mathbb{F}_n[x]$.

תלות לינארית

בלתי תלוי לינארית – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ וקטורים ב- V .

נאמר ש- $v_1, v_2, \dots, v_k$ הם קבוצה בלתי תלויה לינארית אם

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = \bar{0}$$

אז $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

הערה

(1) להגיד שוקטורים הם בלתי תלויים לינארית אומר שהצירוף הלינארי היחיד שלהם של וקטור האפס

הוא הצירוף הלינארי בו כל הסקלרים הם אפסים.

(2) אנחנו אומרים שקבוצה היא תלויה לינארית אם היא לא בלתי תלויה לינארית.

דוגמאות

(1) הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

(2) הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

(3) הקבוצה $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ היא בלתי תלויה לינארית.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $A \subseteq B \subseteq V$ קבוצות סופיות של וקטורים ב- V .

(1) אם A תלויה לינארית אז B תלויה לינארית.

(2) אם B תלויה לינארית אז A בלתי תלויה לינארית.

(3) אם $\bar{0} \in A$ אז A תלויה לינארית.

(4) יהיו $v, w \in V$, $\bar{0} \neq w$ שני וקטורים. v, w תלויים לינארית אם ורק אם v הוא כפולה בסקלר של w .

הערה

כדי להוכיח שקבוצה היא תלויה אפשר לנסות לנחש צירוף לינארי של אחד מהוקטורים על ידי האחרים.

בסיס ומימד

בסיס – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ותהא $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V$ קבוצה סופית של וקטורים.

B תקרא בסיס ל- V אם מתקיים:

(1) B קבוצה פורשת ל- V .

(2) B קבוצה בלתי תלויה לינארית.

הערה

(1) אם B בסיס ל- V אז כל וקטור ב- V הוא צירוף לינארי של וקטורים מ- B וגם הצירוף הלינארי הוא

יחיד. כלומר B מייצג בצורה פשוטה את כל הוקטורים במרחב.

(2) יש יותר מבסיס אחד לכל מרחב.

דוגמאות

(1) הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס ל- $\mathbb{F}^n$. קבוצה זו נקראת הבסיס הסטנדרטי ל- $\mathbb{F}^n$.

(2) הקבוצה $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ היא בסיס ל- $\mathbb{F}_n[x]$. היא נקראת הבסיס הסטנדרטי ל- $\mathbb{F}_n[x]$.

(3) הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ היא בסיס למרחב $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$.

מימד – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי V מרחב וקטורי נפרש סופית מעל $\mathbb{F}$.

המימד של V אשר יסומן ב- $\dim(V)$ מוגדר להיות הגודל של אחד הבסיסים של V .

המימד של מרחב האפס יוגדר להיות 0.

הערות

כל הבסיסים באותו גודל ולכן ההגדרה מוגדרת היטב.

דוגמאות

- (1) המימד של המרחב $\mathbb{F}^n$ הוא n .
- (2) המימד של המרחב $\mathbb{F}_n[x]$ הוא $n + 1$.
- (3) המימד של המרחב $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ הוא 1.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ממימד n ותהא $A \subseteq V$ קבוצה סופית של וקטורים.

- (1) אם A היא בלתי תלויה לינארית אז $|A| \leq n$.
- (2) אם A היא קבוצה פורשת ל- V אז $n \leq |A|$.
- (3) אם A בת"ל וגם $|A| = n$ אז A היא בסיס ל- V .
- (4) אם A היא קבוצה פורשת ל- V וגם $|A| = n$ אז A היא בסיס ל- V .
- (5) אם A קבוצה בת"ל אז ניתן להשלים אותה לבסיס ל- V .
- (6) אם A היא קבוצה פורשת ל- V אז היא מכילה בסיס ל- V .

הערה

- (1) מהטענה הזו אנחנו מבינים שכדי למצוא בסיס עלינו למצוא קבוצה פורשת וממנה למצוא את הבסיס.
 (2) לכל מרחב נפרש סופית יש בסיס וזה אומר שיש לו מימד סופי.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי V מרחב וקטורי נפרש סופית מעל $\mathbb{F}$ ויהי $W \subseteq V$ תת מרחב וקטורי של V .

(1) W הוא מרחב נפרש סופית.

(2) $0 \leq \dim(W) \leq \dim(V)$

(3) $\dim(W) = 0$ אם ורק אם $W = \{\overline{0}\}$.

(4) $\dim(W) = \dim(V)$ אם ורק אם $W = V$.

הערה

שימו לב שהסעיף השלישי נכון רק אם $W \subseteq V$ באופן כללי שוויון מימדים לא גורר שוויון של המרחבים.

מימד ודרגה של מטריצה

טענה – דרגה של מטריצה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $m \times n$.

הדרגה של A היא מימד מרחב השורות של A .

כלומר,

$$r(A) = \dim(\text{Row}(A))$$

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהיינה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n \times k}$.

$$r(A) = r(A^t) \quad (1)$$

$$r(A) \leq \min(m, n) \quad (2)$$

$$r(AB) \leq \min(r(A), r(B)) \quad (3)$$

הערה

אלו תכונות חשובות ושימושיות מאד של הדרגה.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$.

המימד של מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\bar{x} = \bar{0}$ הוא $n - r(A)$.

הערה

אם במערכת הומוגנית נמצא $n - r(A)$ וקטורים בת"ל שהם פתרונות אז נוכל למצוא את כל הפתרונות משום שהם בוודאות יפרשו את מרחב הפתרונות.

דטרמיננטות

הגדרות בסיסיות

דטרמיננטה למטריצה 2×2 – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ מטריצה ריבועית מגודל 2×2 מעל $\mathbb{F}$.

הדטרמיננטה של A אשר תסומן ב- $|A|$ או ב- $\det(A)$ מוגדרת להיות

$$|A| = \det(A) = ad - bc$$

הערה

(1) הדטרמיננטה של מטריצה מגודל 2×2 היא מכפלת איברי האלכסון פחות מכפלת איברי האלכסון המשני.

(2) למרות שהסימון של דטרמיננטה הוא כמו ערך מוחלט במספרים ממשיים, אין ביניהם קשר ודטרמיננטה גם יכולה להיות שלילית.

דוגמה

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

מינור – הגדרה

תהא A מטריצה מגודל $n \times n$.

המינור ה- (i, j) של A , אשר יסומן ב- $M_{i,j}$, היא המטריצה המתקבלת ממחיקת השורה ה- i והעמודה ה- j מ- A .

דוגמה

מצא את $M_{1,3}, M_{3,2}$ של המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

הערה

מינור של מטריצה מגודל $n \times n$ הוא מגודל $(n-1) \times (n-1)$.

דטרמיננטה – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $n \times n$.

הדטרמיננטה של A , אשר תסומן ב- $|A|$ או ב- $\det(A)$, מוגדרת:

(1) אם $n = 2$ לפי הנוסחה שראינו.

(2) אם $n > 2$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} \cdot a_{1,k} \cdot |M_{1,k}|$$

הערה

נשים לב שהמינור הם מגודל שקטן ב- 1 מהגודל של A . כלומר עבור כל אחד מהם נמשיך לפתח לפי הנוסחה עד שנגיע לגודל של 2×2 שלו יש לנו נוסחה סגורה.

דוגמה

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

פיתוח דטרמיננטה לפי שורה/עמודה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $n \times n$.

(1) לכל $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ מתקיים כי

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \cdot (-1)^{i+k} |M_{i,k}|$$

(2) לכל $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ מתקיים כי

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \cdot (-1)^{k+j} \cdot |M_{k,j}|$$

הערות

- (1) הנוסחה הראשונה היא פיתוח לפי השורה ה- i והנוסחה השנייה היא פיתוח לפי העמודה ה- j .
- (2) הטענה אומרת שאפשר לבחור איזה עמודה או שורה שנרצה כדי לחשב דטרמיננטה.
- (3) נרצה לבחור שורה או עמודה שיש בה כמה שיותר אפסים כדי להקל על החישובים שלנו.

דוגמה

חשב את הדטרמיננטה של

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & -3 \\ 12 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

הערה

ניתן בקלות להבין למה שווה $(-1)^{i+j}$ על ידי כתיבת המטריצה ריקה והשמת פלוס ב- $(1,1)$ ואז להמשיך את הסימון עם פלוס ומינוס ככה שליד פלוס יש מינוס וליד מינוס יש פלוס.

לדוגמה

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

איפה שיש פלוס המקדם הוא 1 ואיפה שיש מינוס המקדם הוא -1.

תכונות של דטרמיננטה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $n \times n$.

$$(1) \det(A) = \det(A^t)$$

$$(2) \text{ אם } B \text{ היא שורת/עמודת אפסים אז } \det(A) = 0.$$

$$(3) \text{ אם } A \text{ היא משולשת עליונה/תחתונה אז הדטרמיננטה שלה שווה למכפלת איברי האלכסון.}$$

$$(4) \text{ אם } B \text{ היא המטריצה שהתקבלה מ- } A \text{ על ידי הכפלת שורה כלשהי בסקלר } \alpha \in \mathbb{F} \text{ אז}$$

$$\det(B) = \alpha \cdot \det(A)$$

$$(5) \text{ אם } B \text{ היא המטריצה שהתקבלה מ- } A \text{ על ידי החלפת השורה ה- } i \text{ בשורה ה- } j \text{ עבור } i, j \text{ שונים אז}$$

$$\det(B) = -\det(A)$$

$$(6) \text{ אם } B \text{ היא המטריצה שהתקבלה מ- } A \text{ על ידי הוספת השורה ה- } i \text{ מוכפלת בסקלר כלשהו לשורה ה-}$$

$$j \text{ עבור } i, j \text{ שונים אז}$$

$$\det(B) = \det(A)$$

הערה

מתכונות 4-6 אנחנו מבינים איך הדטרמיננטה מתנהגת כשעושים על המטריצה פעולות אלמנטריות. אנחנו יודעים שתמיד אפשר להביא מטריצה למטריצה משולשת עליונה בעזרת הדירוג של גאוס ולכן דרך נוספת לחישוב דטרמיננטה היא על ידי דירוג המטריצה ואז כפל של איברי האלכסון. שימו לב שצריך רק לוודא שעושים את התיקונים הנדרשים לפי הפעולות שעשינו.

דוגמה

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהיינה A, B מטריצה מגודל $n \times n$.

(1) לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים כי $\det(\alpha \cdot A) = \alpha^n \det(A)$.

(2) אם A, B שקולות שורה אז $\det(A) \neq 0$ אם ורק אם $\det(B) \neq 0$.

הערה

שימו לב שהדטרמיננטה לא בהכרח שווה בין מטריצות שקולות שורה.

מסקנה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה מגודל $n \times n$ אז $r(A) = n$ אם ורק אם $\det(A) \neq 0$.

הערה

המסקנה האחרונה אומרת שאנחנו יכולים להסיק מידע על הדרגה של מטריצה לפי הדטרמיננטה שלה. אם הדרגה היא לא אפס אז הדרגה מלאה.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהיינה A, B מטריצות מגודל $n \times n$ אז

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

הערה

תכונה זו נקראת כפליות הדטרמיננטה.

דוגמה

חשב את הדטרמיננטה של

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} & -7 \\ 0.3 & 4 & -1 \\ 0 & 10 & -20 \end{pmatrix}$$

מטריצות הפיכות

הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{F}$.

A תקרא מטריצה הפיכה אם קיימת מטריצה ריבועית B מאותו גודל מעל $\mathbb{F}$ כך ש-

$$AB = BA = I$$

אנחנו נסמן את המטריצה B ב- A^{-1} והיא תקרא המטריצה ההופכית של A .

הערה

- (1) ההגדרה היא עבור מטריצות ריבועיות בלבד.
- (2) יש מטריצות הפיכות ויש מטריצות שהן אינן הפיכות.
- (3) ניתן לחשוב על מטריצות הפיכות בכך שאפשר "לבטל" את הכפל בהן. כלומר אם יש לנו כפל מטריצות

$$AB = C$$

אז ניתן להכפיל ב- A^{-1} ולקבל

$$A^{-1}AB = A^{-1}C$$

$$B = A^{-1}C$$

שזה בדיוק מה שהיינו עושים אם A, B, C היו איברים בשדה.

- (4) המטריצה ההופכית היא יחידה.

דוגמאות

(1) המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ היא מטריצה הפיכה.

(2) המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ היא אינה מטריצה הפיכה.

הערה

מטריצת האפס מכל גודל היא אינה הפיכה.

הופכית של מטריצות מגודל 2×2

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ מטריצה מגודל 2×2 הפיכה.

אז מתקיים כי

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

דוגמה

מצא את המטריצה ההופכית (אם קיימת) של $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

הערות

- (1) אם המטריצה הפיכה אז A^{-1} מוגדרת כמו שצריך, כלומר אין חלוקה ב-0.
- (2) כדי לבדוק אם מטריצה מגודל 2×2 הפיכה ניתן פשוט לבדוק שהנוסחה הזאת מוגדרת, כלומר שאין חלוקה ב-0.
- (3) שימו לב שאנחנו בעצם מחלקים בדטרמיננטה של המטריצה.
- (4) בגדלים גדולים יותר אין נוסחה סגורה.

תכונות

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית הפיכה ותהא B מטריצה ריבועית מאותו גודל.

$AB = I$ אם ורק אם $BA = I$.

דוגמה

עשינו בדיקה בדוגמה מקודם כי

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = I$$

ולכן מפה כבר ללא חישוב ניתן להסיק כי

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

הערה

כדי לבדוק שההגדרה מתקיימת מספיק שנבדוק כפל בצד כלשהו ואז נוכל להסיק שהמטריצה היא ההופכית.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, ותהיינה A, B מטריצות ריבועיות מאותו גודל מעל $\mathbb{F}$ הפיכות.

(1) גם המטריצה A^{-1} הפיכה ומתקיים כי $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) המטריצה AB הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(3) המטריצה A^t הפיכה ומתקיים $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

הערה

אם AB הפיכה ו- A, B הן מטריצות ריבועיות מאותו גודל אז גם A, B הפיכות.

משפט השקילויות

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$ מעל $\mathbb{F}$.

כל התנאים הבאים שקולים:

$$(1) \quad A \text{ הפיכה.}$$

$$(2) \quad r(A) = n$$

$$(3) \quad \det(A) \neq 0$$

$$(4) \quad \text{קיים פתרון יחיד למערכת המשוואות } A\bar{x} = \bar{0}$$

$$(5) \quad \text{לכל } b \in \mathbb{F}^n \text{ קיים פתרון יחיד למערכת המשוואות } A\bar{x} = \bar{b}$$

$$(6) \quad A \text{ שקולת שורות למטריצת היחידה.}$$

$$(7) \quad \text{Row}(A) = \mathbb{F}^n$$

$$(8) \quad \text{Col}(A) = \mathbb{F}^n$$

הערה

כשאנחנו נראה בתרגילים שנתון על מטריצה שהיא הפיכה אז אנחנו נעבור בראש על כל השקילויות ונבחר בשקילות שתעזור לנו בתרגיל.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה הפיכה. אז

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$$

דוגמה

מצא את ההופכית של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

הערה

כדי למצוא את ההופכית של A נעשה את השלבים הבאים:

- (1) נסדר את המטריצה $(A|I)$.
- (2) נדרג את צד שמאל למדורגת קנונית.
- (3) אם הגענו למטריצת היחידה בצד שמאל של הקו אז מה שיהיה בצד ימין זה ההופכית של A .

העתקות לינאריות

הגדרות בסיסיות

העתקה לינארית – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו V, W שני מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$.

ההעתקה $T: V \rightarrow W$ תקרא העתקה לינארית אם מתקיימים התנאים הבאים:

$$(1) \quad \text{לכל } v, u \in V$$

$$T(v + u) = T(v) + T(u)$$

$$(2) \quad \text{לכל } v \in V \text{ ולכל } \alpha \in \mathbb{F}$$

$$T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v)$$

הערות

(1) העתקות לינאריות גם מכונות טרנספורמציות לינאריות.

(2) העתקה לינארית ממרחב לעצמו, כלומר $T: V \rightarrow V$, נקראת אופרטור לינארי.

(3) שימו לב שהפעולות של החיבור והכפל בסקלר הם לפי המרחבים. בצד שמאל זה הפעולות של

המרחב V ובצד ימין אלו הפעולות של המרחב W .

(4) העתקה לינארית היא העתקה שמתנהגת "נחמד" ביחס לפעולות של החיבור ושל כפל בסקלר של

המרחב הווקטורי. כלומר להפעיל את ההעתקה על צירוף לינארי מתנהג בצורה הבאה:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_k T(v_k)$$

דוגמאות

(1) ההעתקה $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $T(x) = 3x$ היא העתקה לינארית.

(2) ההעתקה $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי

$$T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a + c \\ 2b - c \end{pmatrix}$$

היא העתקה לינארית.

(3) ההעתקה $T: V \rightarrow W$ המוגדרת לפי $T(v) = 0_W$ היא העתקה לינארית.

(4) ההעתקה $T: V \rightarrow V$ המוגדרת לפי $T(v) = v$ היא העתקה לינארית.

הערות

(1) הצורה של העתקה לינארית מפורשת היא שכל פרמטר יכול לכפול אותו איזשהו סקלר וניתן לסכום אותם. אם אנחנו רואים בהגדרה מכפלה של פרמטרים או העלאה בחזקה, שורש, ערך מוחלט או כל דבר שהוא לא פרמטר שכופל אותו סקלר אז ההעתקה היא לא לינארית.

לדוגמה

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab \\ 0 \end{pmatrix}$$

אינה העתקה לינארית.

(2) נהוג לסמן את העתקת הזהות בסימון $Id_V: V \rightarrow V$. כלומר $Id_V(v) = v$ לכל $v \in V$.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהיו V, W מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

$$T(\bar{0}_V) = \bar{0}_W \quad (1)$$

$$T(-v) = -T(v) \quad \text{לכל } v \in V \quad (2)$$

הערה

אלו תנאים שמתקיימים עבור העתקות לינאריות אבל הם לא תנאים מספיקים לכך שהעתקה היא העתקה לינארית. כלומר יש העתקות לא לינאריות שמקיימות זאת, לדוגמה

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$ כך ש- V נפרש סופית ויהי $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ בסיס ל- V ותהא $\{w_1, w_2, \dots, w_n\} \subseteq W$ וקטורים ב- W .

אז קיימת העתקה לינארית יחידה כך ש-

$$T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2, \dots, T(v_n) = w_n$$

המוגדרת על ידי

$$\begin{aligned} T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) &= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + \dots + \alpha_n T(v_n) = \\ &= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n \end{aligned}$$

הערות

- (1) הטענה הזו נותנת דרך להגדיר העתקות לינאריות בצורה די פשוטה. תבחרו בסיס ל- V ותקבעו לאן כל איבר בבסיס עובר. זה מגדיר בצורה יחידה העתקה לינארית לפי הנוסחה האחרונה.
- (2) אם יש שתי העתקות שעבור בסיס כלשהו הן זהות, אז מהטענה זה אומר שהן אותה העתקה.
- (3) במילים אחרות הטענה הזו אומרת שאיברי בסיס מגדירים באופן מלא העתקה לינארית.

דוגמה

יהיו המרחבים $\mathbb{R}^2$ ואת $\mathbb{R}_1[x]$ מעל $\mathbb{R}$ ואת הבסיס

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

יש העתקה לינארית יחידה כך ש-

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3x - 1$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

והיא מוגדרת לפי

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 3ax + 5b - a$$

הערה

שימו לב שאפשר להשתמש בטענה הזו לכל בסיס שנבחר.

גרעין ותמונה

גרעין ותמונה של העתקה לינארית – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהיו V, W שני מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

(1) הגרעין של T אשר יסומן ב- $Ker(T)$ מוגדר להיות

$$Ker(T) = \{v \in V | T(v) = \bar{0}_W\}$$

(2) התמונה של T אשר תסומן ב- $Im(T)$ תוגדר להיות

$$Im(T) = \{T(v) | v \in V\}$$

הערות

(1) במילים, הגרעין של T הוא כל הוקטורים ב- V שנשלחים לוקטור האפס של W . שימו לב כי

$$Ker(T) \subseteq V$$

(2) במילים, התמונה של T היא כל הוקטורים ב- W שמתקבלים על ידי איזשהו וקטור ב- V על ידי ההעתקה. שימו לב כי

$$Im(T) \subseteq W$$

דוגמה

נתונה ההעתקה

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ a - b \end{pmatrix}$$

מתקיים כי

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Ker(T)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Im(T)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin Im(T)$$

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

(1) הגרעין של T הוא תת מרחב וקטורי של V .

(2) התמונה של T היא תת מרחב וקטורי של W .

הערה

(1) הטענות האלו אומרות שבעצם כל מה שלמדנו בחלק של מרחבים וקטורים תקף גם לגרעין ולתמונה.

(2) בפרט זה אומר שהגרעין והתמונה הם סגורים לחיבור ולכפל בסקלר.

(3) בנוסף לגרעין ולתמונה יכול להיות בסיס ומימד אשר מגדירים אותם בצורה מלאה.

דוגמה

מצא בסיס ומימד לגרעין ולתמונה של ההעתקה

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ a - b \end{pmatrix}$$

הערה

- (1) נשים לב שאם יש לנו בסיס $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ל- V אז הקבוצה $\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ היא קבוצה פורשת לתמונה.
- (2) כדי למצוא בסיס ומימד של התמונה נמצא קבוצה פורשת לתמונה על ידי הפרדה לפי הפרמטרים ומשם הוצאת הפרמטרים החוצה. מכך נגלה את קבוצה פורשת וממנה נוציא בסיס.
- (3) כדי למצוא בסיס ומימד של הגרעין, נדרוש שההעתקה שווה לאפס ומשם נוציא מערכת משוואות הומוגנית. מרחב הפתרונות של המערכת הזו הוא הגרעין של ההעתקה.

פעולות חשבון בהעתקות לינאריות

חיבור וכפל בסקלר בהעתקות לינאריות – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$, תהיינה $T, S: V \rightarrow W$ העתקות לינאריות ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$.

(1) ההעתקה $T + S: V \rightarrow W$ מוגדרת על ידי

$$(T + S)(v) = T(v) + S(v)$$

(2) ההעתקה $\alpha T: V \rightarrow W$ מוגדרת על ידי

$$(\alpha T)(v) = \alpha T(v)$$

הערות

(1) החיבור והכפל בסקלר מוגדרים בדיוק איך שאנחנו מכירים חיבור של פונקציות וכפל של סקלר בפונקציה.

(2) ההעתקה $T + S$ ו- αT הן העתקות לינאריות.

דוגמה

חבר את ההעתקות

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ a - b \end{pmatrix}$$

$$S \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 3b \\ a - 2b \end{pmatrix}$$

הרכבה של העתקות לינאריות – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהיו U, W, V מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$ ותהיינה $T: V \rightarrow W$ ו- $S: W \rightarrow U$ העתקות לינאריות.

ההעתקה $S \circ T: V \rightarrow U$ מוגדרת על ידי

$$(S \circ T)(v) = S(T(v))$$

הערות

- (1) נשים לב כי $T(v) \in W$ ולכן S יכולה לפעול עליו.
- (2) לפעמים מסמנים $S \circ T$ בתור ST .
- (3) אם $T: V \rightarrow V$ אז ניתן להרכיב את T עם עצמו. אנחנו מגדירים את T^k בתור ההרכבה של T k פעמים עם עצמו.
- (4) נגדיר $T^0 = Id$ שהיא העתקת הזהות.
- (5) $S \circ T$ היא העתקה לינארית.

דוגמה

חשב את ההרכבה $S \circ T$ של

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ a - b \end{pmatrix}$$

$$S \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + 3b \\ a - 2b \end{pmatrix}$$

הערה

הפעולות האלו מאפשרות לנו לבנות העתקות לינאריות נוספות מהעתקות קיימות.

העתקות חד-חד-ערכיות, על והפיכות

חד-חד-ערכי ועל – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

(1) T תקרא חד-חד-ערכית (חח"ע) אם לכל $u, v \in V$ כך ש- $T(u) = T(v)$ אז $u = v$.

(2) T תקרא על אם לכל $w \in W$ קיים $v \in V$ כך ש- $T(v) = w$.

הערות

(1) חח"ע אומר שכל איבר בתמונה של T מתקבל פעם אחת בלבד. כלומר יש $v \in V$ יחיד שלאחר הפעלת T נקבל את האיבר בתמונה.

(2) על אומר שכל איבר ב- W מתקבל על ידי איזשהו $v \in V$.

דוגמה

ההעתקה $T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ היא העתקה חח"ע ועל.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

(1) T היא העתקה חח"ע אם ורק אם $\{0_V\} = \text{Ker}(T)$.

(2) T היא העתקה על אם ורק אם $\text{Im}(T) = W$.

הערה

מהטענה הזו כדי לבדוק האם העתקה היא חח"ע ועל עלינו לבדוק למה שווה התמונה ולמה שווה הגרעין.

דוגמה

ההעתקה $T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ חח"ע ועל כי מתקיים

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$$

העתקה הפיכה – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

נאמר ש- T העתקה הפיכה אם קיימת העתקה לינארית $S: W \rightarrow V$ כך ש-

$$S \circ T = Id_V$$

$$T \circ S = Id_W$$

במקרה זה נסמן $T^{-1} = S$ והיא תקרא ההעתקה ההופכית של T .

הערות

(1) ההגדרה דומה לאיך שהגדרנו עבור מטריצות הפיכות. פה הפעולה שהיא הפיכה היא פעולת ההרכבה.

(2) ההגדרה בעצם אומרת שלכל $v \in V$ מתקיים $(T^{-1} \circ T)(v) = v$ ושלכל $w \in W$ מתקיים $(T \circ T^{-1})(w) = w$.

דוגמה

ההעתקה $T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ היא העתקה הפיכה.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

(1) T היא העתקה הפיכה אם ורק אם T היא חח"ע ועל.

(2) T היא העתקה הפיכה אם ורק אם $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}_V\}$ ו- $\text{Im}(T) = W$.

דוגמה

ההעתקה $T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ היא העתקה הפיכה.

הערה

כדי לבדוק האם העתקה היא הפיכה נבדוק את הגרעין והתמונה שלה.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהיו V, W, U מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$ ותהיינה $T: V \rightarrow W$ ו- $S: W \rightarrow U$ העתקות לינאריות הפיכות.

(1) $T^{-1}: W \rightarrow V$ היא העתקה הפיכה ומתקיים כי $(T^{-1})^{-1} = T$.

(2) ההעתקה $S \circ T: V \rightarrow U$ היא העתקה הפיכה ומתקיים כי $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$.

משפט המימדים להעתקות לינאריות

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל $\mathbb{F}$ כך ש- V, W נפרשים סופית ותהא $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית. אז מתקיים

$$\dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(V)$$

דוגמה

הראה שמשפט המימדים מתקיים עבור ההעתקה

$$T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b \\ a - b \end{pmatrix}$$

הערה

- (1) אם אנחנו יודעים מה המימד של הגרעין אז ניתן ישר להבין מה המימד של התמונה.
- (2) אם אנחנו יודעים מה המימד של התמונה אז ניתן ישר להבין מה המימד של הגרעין.

מסקנות ממשפט המימדים

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהיו V, W מרחבים וקטורים נפרשים סופית מעל $\mathbb{F}$ ותהא $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

(1) אם T חח"ע אז $\dim(V) \leq \dim(W)$.

(2) אם T על אז $\dim(V) \geq \dim(W)$.

(3) אם T הפיכה אז $\dim(V) = \dim(W)$.

הערה

הטענה הזו שימושית מאד כאשר אנחנו נדרשים להוכיח אי קיום של העתקה לינארית.

דוגמה

הוכח כי אין העתקה לינארית חח"ע $T: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}_3[x]$.

מטריצה מייצגת

וקטור הקואורדינטות – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי V מרחב וקטורי ויהא $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ בסיס סדור ל- V ויהי $v \in V$.

וקטור הקואורדינטות של v אשר יסומן ב- $[v]_B$ הוא הוקטור

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

כך ש- $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$.

הערות

- (1) לכל וקטור ב- V יש צירוף לינארי יחיד בעזרת איברי B .
- (2) וקטור הקואורדינטות הוא הוקטור שמכיל את הסקלרים (לפי הסדר) של הצירוף הלינארי.
- (3) כדי למצוא את וקטור הקואורדינטות נמצא את הצירוף הלינארי ואז נסדר את הסקלרים בעמודה.
- (4) אם אנחנו יודעים מה הבסיס ומה וקטור הקואורדינטות אנחנו גם יכולים למצוא את הוקטור המקורי.

דוגמה

יהי $\mathbb{R}_1[x]$ מעל $\mathbb{R}$ ויהי $B = \{x, x + 1\}$ בסיס סדור ל- $\mathbb{R}_1[x]$.

מצא את וקטור הקואורדינטות $[3x - 2]_B$ ואת הוקטור $v \in \mathbb{R}_1[x]$ כך ש- $[v]_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי V מרחב וקטורי ויהא $B \subseteq V$ בסיס סדור ל- V .

$$(1) \text{ לכל } v, u \in V \text{ מתקיים כי } [v + u]_B = [v]_B + [u]_B.$$

$$(2) \text{ לכל } v \in V \text{ ולכל } \alpha \in \mathbb{F} \text{ מתקיים כי } [\alpha v]_B = \alpha \cdot [v]_B.$$

$$(3) \quad [v]_B = \bar{0} \text{ אם ורק אם } v = \bar{0}_V.$$

טענה

יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, יהי $B \subseteq V$ בסיס סדור ל- V ויהיו $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ וקטורים.

$v_1, v_2, \dots, v_k$ בלתי תלויים לינארית אם ורק אם $[v_1]_B, [v_2]_B, \dots, [v_k]_B$ בלתי תלויים לינארית.

מטריצה מייצגת – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהיו V, W מרחבים וקטורים נפרשים סופית מעל $\mathbb{F}$, יהיו $B_V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ ו- $B_W \subseteq W$ בסיסים סדורים ל- V ו- W בהתאמה ותהא $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

המטריצה המייצגת לפי B_V ו- B_W היא המטריצה המוגדרת על ידי

$$[T]_{B_W}^{B_V} = ([T(v_1)]_{B_W} \quad [T(v_2)]_{B_W} \quad \dots \quad [T(v_n)]_{B_W})$$

הערה

- (1) העמודה ה- i של המטריצה המייצגת היא וקטור הקואורדינטות של $T(v_i)$ לפי הבסיס B_W .
- (2) לרוב אנחנו נסתכל על העתקות מהמרחב אל עצמו. ואז נסמן ב- $[T]_B^B$, כלומר המטריצה המייצגת שהבסיס של התמונה ושל התחום הוא אותו בסיס.

דוגמה

יהי $\mathbb{R}_1[x]$ מעל $\mathbb{R}$ ויהי $B = \{x, x + 1\}$ בסיס סדור ל- $\mathbb{R}_1[x]$.

מצא את המטריצה המייצגת $[T]_B$ להעתקה

$$T(ax + b) = (a - b)x + 2a - b$$

הערה

כמו שראינו בוקטור קואורדינטות, אם אנחנו יודעים מה הבסיסים ומה המטריצה המייצגת לפי הבסיסים האלו אנחנו יכולים למצוא את ההעתקה המפורשת.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהיו V, W מרחבים וקטורים נפרשים סופית מעל $\mathbb{F}$, יהיו $B_V \subseteq V$ ו- $B_W \subseteq W$ בסיסים סדורים ל- V ו- W בהתאמה ותהא $T: V \rightarrow W$ העתקה לינארית.

לכל $v \in V$ מתקיים כי

$$[T(v)]_{B_W} = [T]_{B_V}^{B_W} [v]_{B_V}$$

הערה

הטענה אומרת שבמקום לחשב את ההעתקה עצמה, אנחנו יכולים לעבור למטריצה המייצגת ולחשב אותה כמפלה של מטריצה בוקטור הקואורדינטות ואז לחזור אחורה למרחב המקורי.

דוגמה

יהי $\mathbb{R}_1[x]$ מעל $\mathbb{R}$ ויהי $B = \{x, x + 1\}$ בסיס סדור ל- $\mathbb{R}_1[x]$.

ונתונה $T: \mathbb{R}_1[x] \rightarrow \mathbb{R}_1[x]$ כך ש-

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

מצא את $T(3x - 2)$.

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהיו V, W מרחבים וקטורים נפרשים סופית מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $B_V \subseteq V$ ו- $B_W \subseteq W$ בסיסים סדורים ל- V ו- W בהתאמה ויהיו $T, S: V \rightarrow W$ העתקות לינאריות.

$$[T + S]_{B_V}^{B_W} = [T]_{B_V}^{B_W} + [S]_{B_V}^{B_W} \quad (1)$$

$$\alpha \in \mathbb{F} \quad (2)$$

$$[\alpha T]_{B_V}^{B_W} = \alpha [T]_{B_V}^{B_W}$$

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהיו V, W, U מרחבים וקטורים נפרשים סופית מעל $\mathbb{F}$, יהיו $B_V \subseteq V$, $B_W \subseteq W$ ו- $B_U \subseteq U$ בסיסים סדורים ל- V, W, U בהתאמה ותהיינה $T: V \rightarrow W$ ו- $S: W \rightarrow U$ העתקות לינאריות.

$$[S \circ T]_{B_V}^{B_U} = [S]_{B_W}^{B_U} [T]_{B_V}^{B_W} \quad (1)$$

$$(2) \quad T \text{ הפיכה אם ורק אם } [T]_{B_V}^{B_W} \text{ הפיכה.}$$

$$(3) \quad \text{אם } T \text{ הפיכה אז}$$

$$[T^{-1}]_{B_W}^{B_V} = ([T]_{B_V}^{B_W})^{-1}$$

הערות

- (1) במילים אחרות המייצגת של ההרכבה היא מכפלת המטריצות המייצגות.
- (2) כדי לבדוק אם T הפיכה אז אפשר לבדוק האם המטריצה המייצגת היא הפיכה לפי כל השיטות שראינו כבר.
- (3) כדי למצוא את ההעתקה ההופכית אפשר למצוא את ההופכית של המייצגת (לפי שיטות שראינו בחלק של מטריצות מייצגות) ואז לחזור חזרה להעתקה מהמרחבים עצמם.
- (4) שימו לב שזה לא משנה אילו בסיסים ניקח ולכן אנחנו יכולים לקחת איזה בסיסים שיהיו לנו נוחים לעבודה.

דוגמה

מצא את ההעתקה ההופכית של

$$T(ax + b) = (a - b)x + 2a - b$$

דמיון, ערכים עצמיים ולכסון

ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

ערך עצמי ווקטור עצמי של מטריצה – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה ריבועית.

$\lambda \in \mathbb{F}$ יקרא ערך עצמי של A אם קיים $v \in \mathbb{F}^n$ $\bar{0} \neq v$ כך ש-

$$Av = \lambda v$$

v יקרא וקטור עצמי של ערך עצמי λ .

הערה

נשים לב שוקטור עצמי עם ערך עצמי λ מקיים שהוא פתרון למשוואה

$$(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$$

דוגמה

עבור המטריצה

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1 הוא ערך עצמי עם וקטור עצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ערך עצמי ווקטור עצמי של אופרטור – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי V מרחב וקטורי ותהא $T: V \rightarrow V$ אופרטור לינארי.

$\lambda \in \mathbb{F}$ יקרא ערך עצמי של T אם קיים $v \in V$ $\bar{0} \neq v$ כך ש-

$$T(v) = \lambda v$$

v יקרא וקטור עצמי של ערך עצמי λ .

הערה

שימו לב שההגדרה הזו היא רק עבור העתקה ממרחב לעצמו.

דוגמה

עבור ההעתקה

$$T(ax + b) = bx + a$$

1 הוא ערך עצמי של T עם וקטור עצמי $x + 1$.**טענה**

יהי $\mathbb{F}$ שדה, יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, יהי B בסיס סדור ל- V ותהא $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ו- $v \in V$.

- (1) λ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם λ הוא ערך עצמי של $[T]_B$.
- (2) v הוא וקטור עצמי של T אם ורק אם $[v]_B$ הוא וקטור עצמי של $[T]_B$.

דוגמההראה שהטענה נכונה עבור ערך עצמי 1 והוקטור העצמי $x + 1$ של ההעתקה

$$T(ax + b) = bx + a$$

הערה

מהטענה זה אומר שאם נרצה למצוא ערכים ווקטורים עצמיים של T אז אנחנו נבחר בסיס שנוח לנו לעבוד איתו ונעבוד עם המטריצה המייצגת. בסוף העבודה אנחנו נחזור חזרה למרחב V המקורי לפי וקטורי הקואורדינטות.

פולינום אופייני – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית.
הפולינום האופייני של A הוא הפולינום

$$p(\lambda) = |\lambda I - A|$$

הערה

מחישוב מתקבל שזה אכן פולינום.

דוגמה

מצא את הפולינום האופייני של

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אבחנה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{F}$ ונסמן ב- $p(\lambda)$ את הפולינום האופייני של A .
 λ_0 הוא ערך עצמי של A אם ורק אם λ_0 הוא שורש של $p(\lambda)$.

הערה

כדי למצוא את הערכים העצמיים של מטריצה עלינו למצוא את השורשים של הפולינום האופייני.

דוגמה

מצא את הערכים העצמיים של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מרחב עצמי – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית ויהא $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי.
 המרחב העצמי של λ הוא המרחב

$$V_\lambda = \{v \in \mathbb{F}^n | Av = \lambda v\}$$

הערה

- (1) זוהי הקבוצה של כל הוקטורים העצמיים של ערך עצמי λ בתוספת וקטור האפס.
- (2) נשים לב שזהו מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$ ולכן זהו תת מרחב וקטורי.

ריבוי אלגברי וריבוי גיאומטרי של ערך עצמי – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$ מעל $\mathbb{F}$ ויהא $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של A .

(1) הריבוי האלגברי (ר"א) של λ הוא הריבוי של λ בפולינום האופייני.

(2) הריבוי הגיאומטרי (ר"ג) של λ הוא המימד של המרחב V_λ .

הערה

(1) שימו לב שעבור כל הערכים העצמיים של A , סכום הריבויים האלגבריים הוא לכל היותר הגודל של A . כלומר אם A מגודל $n \times n$ אז הם לכל היותר n .

(2) למעשה הריבוי הגיאומטרי של ערך עצמי λ שווה ל- $n - r(A - \lambda I)$.

(3) אפשר לחשוב על ריבוי גיאומטרי בתור כמה וקטורים עצמיים "שונים" יש לערך עצמי מסוים.

דוגמה

עבור

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

קבע את הריבוי האלגברי ואת הריבוי הגיאומטרי של הערכים העצמיים ± 1 .

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$ מעל $\mathbb{F}$ ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ערך עצמי של A .

(1) הריבוי הגיאומטרי של λ הוא לפחות 1.

(2) הריבוי הגיאומטרי של λ הוא לכל היותר הריבוי האלגברי שלו.

(3) הריבוי האלגברי של λ הוא לכל היותר n .

דרך עבודה למציאת ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{F}$.

- (1) נמצא את הפולינום האופייני של A .
- (2) נמצא את השורשים של הפולינום האופייני.
- (3) לכל שורש λ שנמצא, נפתור את המערכת $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.
- (4) נקבע את הריבוי האלגברי ואת הריבוי הגיאומטרי לכל ערך עצמי.

הערה

אם אנחנו רוצים למצוא את הערכים והוקטורים העצמיים של אופרטור לינארי אז נעבור למטריצה מייצגת כלשהי ונעבוד שם לפי דרך העבודה ובסוף נתייחס לוקטורים העצמיים שמצאנו בתור וקטורי קואורדינטות ונחזיר אותם למרחב המקורי.

דוגמה

מצא את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{F}$.

(1) אם סכום כל השורות ב- A שווה ל- λ אז λ הוא ערך עצמי עם וקטור עצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

(2) A לא הפיכה אם ורק אם 0 הוא ערך עצמי של A .

(3) אם ניחשנו ערך שאם נחסיר אותו מכל האלכסון המטריצה תהפוך להיות לא הפיכה אז הערך הזה הוא ערך עצמי.

הערות

(1) שימו לב שבטענה 2 יש לנו גם המון שקילויות נוספות ללא הפיכה ולכן כולן גוררות ש- 0 הוא ערך עצמי.

(2) שימו לב שאם A לא הפיכה אז 0 הוא ערך עצמי מריבוי גיאומטרי של $n - r(A)$.

טענה

תהא $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

ל- A יש n ערכים עצמיים מרוכבים (לאו דווקא שונים).

הערה

הטענה הזו נובעת מכך שלפולינום מעל המרוכבים יש n שורשים.

טענה

תהא $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ונסמן ב- $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ את הערכים העצמיים המרוכבים שלה.

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n \quad (1)$$

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \quad (2)$$

הערות

(1) אם נשארו לנו לכל היותר שתי ערכים עצמיים לנחש אז בעזרת הטענה הזו נוכל לנחש אותם.

(2) שימו לב שמספר הפעמים שערך עצמי מופיע בטענה הוא בדיוק הריבוי האלגברי שלו.

דוגמה

מצא את הערכים העצמיים של

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

דמיון מטריצות – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

A, B נקראות מטריצות דומות אם קיימת מטריצה P הפיכה כך ש-

$$A = PBP^{-1}$$

דוגמה

המטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

הן מטריצות דומות.

הערות

(1) כל מטריצה דומה לעצמה.

(2) אם A דומה ל- B וגם B דומה ל- C אז A דומה ל- C .

שמורות דמיון

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהיינה A, B מטריצות דומות.

$$r(A) = r(B) \quad (1)$$

$$\det(A) = \det(B) \quad (2)$$

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B) \quad (3)$$

(4) ל- A ו- B יש אותם ערכים עצמיים ולכל ערך עצמי יש אותו ריבוי אלגברי וגיאומטרי.

הערה

הטענות האלו זו דרך טובה לשלול דמיון של שתי מטריצות. אם אחת משמורות הדמיון לא מתקיימת אז נוכל לקבוע שהמטריצות אינן דומות.

לכסון מטריצות

מטריצה לכסינה – הגדרה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית מעל $\mathbb{F}$.

A נקראת מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{F}$ אם היא דומה למטריצה אלכסונית.

כלומר קיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ומטריצה אלכסונית $D \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש-

$$A = PDP^{-1}$$

דוגמה

המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

היא מטריצה לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

הערה

- (1) כל מטריצה אלכסונית היא בפרט מטריצה לכסינה.
- (2) שימו לב שאם A לכסינה ו- B דומה ל- A אז גם B לכסינה.

משפט

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$ מעל $\mathbb{F}$.

A לכסינה אם ורק אם כל הערכים העצמיים של A ב- $\mathbb{F}$ והריבוי הגיאומטרי של כל ערץ עצמי שווה לריבוי האלגברי שלו.

הערה

(1) אם כל הערכים העצמיים ב- $\mathbb{F}$ אז ל- A יש $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ ערכים עצמיים (לאו דווקא שונים) ואז המטריצות של הדמיון יהיו:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P = (v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n)$$

כך ש- $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ הם וקטורים עצמיים מתאימים של $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ והם בסיס ל- $\mathbb{F}^n$ משום שלכל ערך עצמי נוכל למצוא קבוצה בת"ל של וקטורים עצמיים מגודל הריבוי האלגברי.

אז

$$A = PDP^{-1}$$

(2) כלומר אם חסר ערך עצמי או שהריבוי הגיאומטרי של אחד מהם קטן ממש אז לא נוכל להרכיב את המטריצות האלה.

שיטה ללכסון מטריצה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית.

- (1) נמצא את כל הערכים העצמיים ונקבע את הריבוי האלגברי והריבוי הגיאומטרי של כל אחד.
- (2) אם סכום הריבויים האלגבריים קטן מ- n או שיש ריבוי גיאומטרי שלא שווה לריבוי האלגברי נקבע שהמטריצה לא לכסינה.
- (3) אחרת, לכל ערך עצמי נמצא בסיס למרחב העצמי.
- (4) נסדר את הערכים העצמיים במטריצה אלכסונית. (כל ערך עצמי צריך להופיע שם לפי הריבוי האלגברי שלו)
- (5) נסדר את הוקטורים העצמיים שמצאנו בהתאמה לאיך שסידרנו את הערכים העצמיים.
- (6) מסעיף 4 נקבל את המטריצה D ומסעיף 5 נקבל את המטריצה P .

דוגמה

קבע האם המטריצה הבאה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

לכסינה מעל הממשיים ואם כן, מצא מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש-

$$A = PDP^{-1}$$

טענה

יהי $\mathbb{F}$ שדה ותהא A מטריצה ריבועית מגודל $n \times n$ מעל $\mathbb{F}$ ו- D מטריצה אלכסונית מעל $\mathbb{F}$.

- (1) אם ל- A יש n ערכים עצמיים שונים אז A לכסינה.
- (2) אם מתקיים כי $A = PDP^{-1}$ עבור מטריצה הפיכה P אז לכל $k \in \mathbb{N}$ מתקיים $A^k = PD^kP^{-1}$.